Семестрални рад о Алану Тјурингу и Тјуринговој машини

Младен Терзић 0458/2017
Никола Урошевић 0400/2017
Горана Станисављевић 0391/2017

Електротехнички факултет Београд

29.03.2020.

Sadržaj

1 Алан Тјуринг

Алан Матисон Тјуринг (1912-1954) био је енглески математичар, логичар и криптограф. Прича се да је научио да чита за три недеље. Од 1926. до 1931. године похађао је школу у Шеброну и већ тада се видела његова надареност за физику и математику. Смрт најбољег приајтеља посебно га је погодила те се од тада полако повлачи из друштва и затвара у себе. Дипломира математику на Кембрицу 1934. а докторира на Принстону 1939.

Од 1938. године Тјуринг је радио у Британској организацији за разбијање шифара (Government Code and Cypher School). Радио је на проблему немачке машине, Енигма, и сарађивао са Дили Нокс , која је такође радила у GCCS-у. 4.септембра 1939. године, дан пошто је Енглеска објавила рат Немачкој, Тјуринг је прешао у Блечли парк, штаб GCCS-а за време Другог светског рата.

Тјуринг је предводио групу научника који су радили на сузбијању кода немачке машине sa шифровање , Енигме. Енигма је служила Немцима и њиховим савезницима за слање слање строго поверљивих кодираних порука. У њима су биле описане акције, планови и маневри. Тјуринг је развио математичке моделе те дизајнирао електромеханичку направу “бомбу”, која је могла декодирати поруку Енигме. Немци нису знали да су поруке дешифроване те су их и даље слали тим путем. Сматра се да је Тјуринг својим радом допринео скраћивању рата за бар годину дана и тиме спасао милионе живота.

Од 1945. до 1947. године је у Националној Физичкој Лабораторији, где је радио на дизајнирању ACE-а (Automatic Computing Engine). 1946. године презентирао је дизајн првог рачунара у Британији. Иако га је дизајнирао, ACE је извршио први програм тек 1950. године, и то у Тјуринговом одсуству, јер је он тада био у Кембрицу. Године 1949, је постао директор рачунарске лабораторије, Манчестерског Универзитета, и радио је на софтверу једног од првих правих рачунара, Манчестерском Марку I. Радио је и на проблему вештачке интелигенције, и представио је експеримент познат као Тјурингов тест.

Године 1948, је писао шаховски програм за рачунар који још увек није постојао, тако да је 1952. године сам симулирао програм, који је једном победио и једном изгубио меч.

Осим машинама, бавио се и биологијом. Педесетих година занимао се за развој саблона и облика у органозмима. По његовој теорији у организмима псотоје две хемикалије од којих једна мења пигмент коже, а друга спречава мењање. У зависности од интеракције ове две хемикалије (које је назвао морфогенима) постоје и различите шаре на биљкама и животињама. Хемикалије је описао једнаћинама. До решења је дошао, а да ниједном није погледао кроз микроскоп.

Године 1952. Оптужен је због хомосексуалности те је био присиљен да бира између хормонске терапије и затвора. Изабрао је хормонску терапију те је проводио своје дане изолован од света. Седмог јуна 1954 године , Тјуринг је појео јабуку пуну цијанида, а његова смрт је прогласена самоубиством. О његовој смрти постоје и разне друге теорије.

Британска влада се 2009. године извинила за своје поступање овом генијалном научнику , признавси његову кључну улогу у завршетку Другог светског рата.

Од 1966. године Асоцијација за рачунарство (Association for Computing Machinery) додељује Тјурингову награду, за рачунарска достигнућа. Сматра се да је та награда у свету рачунара једнака са Нобеловом наградом. У Манчестеру, у граду у којем је радио до краја свог живота, се одржавају разне почасти у име Тјуринга. Једна од улица у Манчестеру је 1994. године названа по Тјурингу (Alan Turing Way).

Статуа Тјурингу је откривена у Манчестеру 23. јуна 2001. године у Саквил парку, између Манчестерског универзитета и улице канал (Canal Street). Одлучено је да се његов лик нађе на новчаници од 50 фунти од 2021. године.

2 Историјки развој Тјурингове машине

2.1 Историјска позадина: рачунске машине

Робин Ганди (1919—1995) студент Алана Тјуринга (1912—1954) и његов доживотни пријатељ - прати порекло појма "рачунарска машина"назад до Чарлса Бебица (око 1834.) и заправо предлаже "Бебицову тезу":

"Читав развој и операције су сада способне да се изврше машински. —цитат Бебица од стране Гандија."

Аналитичка машина је други модел рачунарске машине Чарлса Бебица. Иако ни аналитичка машина није завршена током његовог живота као ни претходни модел познат као диференцијална машина оне су свакако донеле велики преокрет у развоју рачунара.

Диференцијална машина је била намењена за рачунање са четири основне аритметичке операције: сабирање, одузимање, множење и дељење. Аналитичка машина је много више еволуирала и била је ближа модерном концепту рачунара.

Она је била намењена за налажење вредности сваког математичког израза за који знамо како да га израчунамо, то јест редослед операција које треба извршити: алгоритме.

Гандијева анализа Бебицове Аналитичке машине описује следећих пет операција:

1. Аритметичке функције $+$, $-$, $\times$ где $-$ указује "правилно"одузимање $x - y = 0$ ако је $y \geq x$

2. Било који редослед операција је операција

3. Итерација операције (понавља н пута операција Р)

4. Условна итерација (понављање н пута на операцији Р условљено "успехом"теста Т)

5. Условни пренос (тј условни "Иди").

Ганди наводи да функције које се могу израчунати (1), (2), и (4) су управо оне који су Тјуринг израчунљиве.

Entscheidungsproblem ("проблем одлуке"): Хилбертово десето питање

Што се тиче Хилбертових проблема које је поставио чувени математичар Давид Хилберт 1900. године, један аспект проблема 10 је плутао око 30 година пре него што је решен.

У покушају да одговори на овај проблем Алан Трјурин је написао чланак "О израчунљивим бројевима", са применом на Entscheidungsproblem. Хилберт је поставио питање може ли се проблем одлучивости решити избором у бинарној опозицији, тј. постоји ли алгоритам помоћу којег се може одлучити да ли је ваљана ма која формула првог реда?

Тјуринг је проблем преформулисао из логичке сфере у сферу бројева. Проблем одлучивости тако постаје питање како одредити бесконачно преко коначног, дакле проблем који се не решава доказивањем веч израчунавањем.

2.2 Тјурингова (аутоматска) машина

Тако постављен проблем решава уводећи појам о-машине(касније назване Тјуринговом) коју назива и рачунаром. У том периоду "рачунар"и даље је подразумевао особу која се бави рачунским радњама, најчешће женског пола. Тјуринг, дакле, узима људску свест као модел за свој рачунар.

Симулацијом менталних процеса осмишљава Тјурингову машину, уређај који манипулише симболима забележеним на бескрајној траци и то тако што брише или штампа симбол или помера траку за једно поље налево или удесно, тако да у једном тренутку пред собом има само један симбол. Рачунске операције које са тим симболима машина може да врши одређене су табелом понашања, а Тјуринг је нешто касније замислио и Универзалну машину која би могла да обави радњу сваке друге Тјурингове машине.

Овом машином Алан Тјуринг је пре свега покушао да реши проблем из области математичке логике користећи се ванматематичким средствима. Показао је да је одговор на Entscheidungsproblem негативан; нема доказа да ће се машина са алгоритмом за израчунавање бесконачно великог броја у свом раду икад зауставити. Међутим, осим што је решио питање које је поставио Гилберт, Тјуринг је у чланку "О израчунљивим бројевима"поставио и основне принципе функционисања рачунара, и то не само апстрактних, већ и ових које данас користимо.

3 Тјурингова машина

3.1 Формална дефиниција

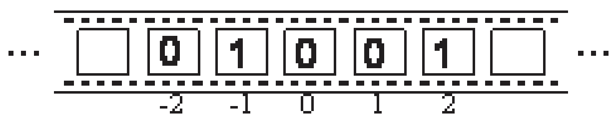
Тјурингова машина M је уређена седморка која се састоји од $= \{S, b, Q, q_0, q_+, q_-, f\}$, где су :

- $S = \{b, a_1, a_2 \ldots a_n\}$ - азбука Тјурингове машине
- b - бланко знак
- $Q = \{q_0, q_1, \ldots q_m, q_+, q_-\}$ - скуп унутрашњих стања
- q_0 - почетно стање
- q_- - завршно стање са негативним одговором на постављени проблем који решава ТМ
- q_+ - завршно стање са позитивним одговором на постављени проблем који решава ТМ
- $f : Q \times S \to Q \times S \times \{-1, +1\}$

Програм Тјурингове машине:
$(q_i, a_j) \to (q_i', a_j', r)$, где су q_i, q_i' тренутно и ново унутрашње стање, a_j, a_j' тренутни записани знак на траци и нови записани знак на траци; r може имати вредности $+-1$(померање главе за једно место удесно односно улево).

3.2 Неформални опис

Бесконачна трака садржи поља означена целим бројевима и служи само за читање и писање Свако поље (квадратић) може да садржи само један од знакова (0, 1, празно) које машина може прочитати или написати
- Знаци **0** и **1** су бинарне ознаке и служе за запис информација
- **Празно** означава крај записа



Глава за читање и писање се позиционира изнад знакова и може да изврши следеће операције на траци
- да прочита један знак са траке изнад поља где се налази глава
- да напише један знак у поље на траци изнад којег се налази глава
- помери се за једно поље у десно (+1) или једно поље улево (-1)
- да избрише знак на пољу изнад кога се налази

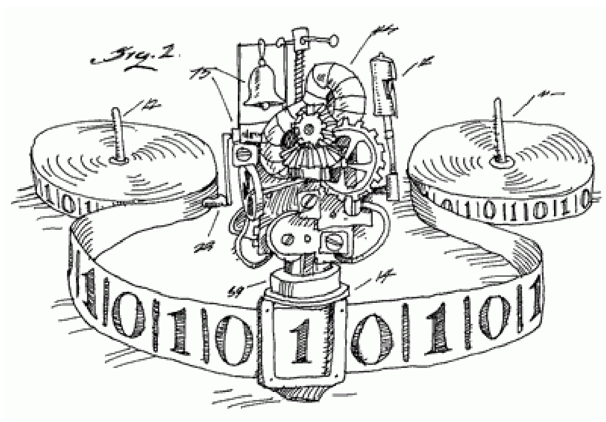
Индикатор стањаје део управљачке јединице у показује стање коме се машина може налазити. Стање може бити:
- почетно стање
- радно стање
- завршно стање

Управљачка јединица (програм) управља машином и води је корак по корак кроз алгоритам. Има коначан број упутстава и команди. Издаје наредбе глави шта да напише и у коју страну да се помери, према подацима са траке и тренутног стања управљачке јединице. Машина извршава наредбе по редоследу по коме оне издају. У раду доноси одлуку на основу:
- тренутног стања машине
- знака који глава чита са траке

Тада машина може да:
-пређе у неко друго стање
-напише неки од знакова на траци (**0** или **1**)
-помери главу за једно поље улево или удесно

Напомена: Трака служи као меморија, глава као улазно излазна једница и контролер, а уптављачка јединица као програм

На почетку рада се на траци налази одређени број поља са симболима. Управљачка јединица је у једном од дефинисаних стања. Чита се тренутни симбол са траке изнад кога се налази глава и уписује нови. После тога се глава може померити једно поље лево или једно поље десно. На основу стаја и прочитаног знака са траки машина одлучује у које ће ново стање прећи управљацка јединица, који ће знак бити уписан натраци уместо прочитаног и у коју ће се страну померити глава.
Дакле машина се креће од фазе до фазе користећи прецизни низ правила и једног симбола који чита са траке. Машина може да чита симбол са траке, да га промени или уклони.



3.3 Варијанте Тјурингове машине

Посматрамо Тјурингове машине у којима:

- алфабет којим се записује садржај ћелија траке не мора бити унарни,
- поред завршног стања q_z уводе се и нека специјална завршна стања, рецимо $q_d a$ i $q_n e$ која,интуитивно,значе позитиван,односно негативан одговор на постављени проблем.
- дозвољена је трака која је бесконачна само на једну страну, тј. постоји крајња лева ћелија, док се на десно трака пружа неограничено,
- уместо само једне постоји више трака,а за сваку траку постоји посебна глава,

- над једном траком постоји више глава уместо једне,
- трака је дводимензионална,а не једнодимензионална,тј. трака подсећа на бесконачну шаховску плочу,
- у једној наредби машине могуће је уписати знак у ћелију и померати главу,
- не важи захтев за детерминисаношћу,тј. дозвољено је да постоје наредбе које одговарају истом стању и знаку над којом се налази глава,а које се разликују по дејству(операцији која се извршава и/или срању у које се прелази) итд.

4 Универзална Тјурингова машина

4.1 Опис

Својеврстан пример програмибилног дигиталног рачунара опште намене са програмом и подацима смештеним у меморију који симулира извршавање осталих Тјурингових машина.

Улазни подаци који се смештају на траку универзалне Тјурингове машину су опис неке посебне машине,тј. њен програм,и улазни подаци те машине,а резултат извршавања је резултат рада симулиране посебне машине.

4.2 Задаци:

пр.1) Тјурингова машина ради са азбуком $S = \{0, b, 1\}$,где је b бланко знак. Нека се на траци Тјурингове машине природни број представља својим бинарним записом, између два празна симбола. У све остале ћелије је уписан празан симбол. Нека се глава машине налази над крајњим левим знаком задатог броја. Конструисати програм за Тјурингову машину $f : Q \times S \to Q \times S \times \{+1, -1\}$којим се исписује први комплемент датог броја(број добијен инвертовањем сваког бита датог броја).

Решење:

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
$f(q_0, 0) = (q_1, 1, +1)$
$f(q_0, 1) = (q_1, 0, +1)$
$f(q_1, b) = (q_+, b, -1)$
$f(q_1, 0) = (q_1, 1, +1)$
$f(q_1, 1) = (q_1, 0, +1)$

пр.2) Тјурингова машина ради са азбуком $S = \{1, b\}$где је b бланко знак. Нека је број задат као низ јединица између два празна симбола. У све остале ћелије је уписан бланко знак. Нека се глава налази над крајњим левим знаком 1.
Конструисати програм за Тјурингову машину $f : Q \times S \to Q \times S \times \{+1, -1\}$ којим се задати број помера за једну ћелију улево.

Решење:

$f(q_0, b) = (q_-, b, +1)$
$f(q_0, 1) = (q_1, 1, -1)$
$f(q_1, b) = (q_2, 1, +1)$
$f(q_1, 1) = (q_-, 1, +1)$
$f(q_2, b) = (q_3, b, -1)$
$f(q_2, 1) = (q_2, 1, +1)$
$f(q_3, b) = (q_-, b, +1)$
$f(q_3, 1) = (q_+, b, -1)$

1.а) Тјурингова машина ради са азбуком $S = \{0, 1, b\}$,где је b празан симбол. Нека се на траци Тјурингове мапине број $n \epsilon N_0$ представља својим бинарним записом, између два празна симбола. У све остале ћелије је уписан празан симбол. Нека се глава Тјурингове машине налази над крајњим левим знаком задатог броја. Конструисати програм за Тјурингову машину $f : Q \times S \to Q \cup \{q_+, q_-\} \times S \times \{+1, -1\}$ којим се у продужетку броја исписује дати број још једном.

Решење:

$$f(q_0,0)=(q_1,0,+1)$$
$$f(q_0,1)=(q_1,1,+1)$$
$$f(q_1,0)=(q_1,0,+1)$$
$$f(q_1,1)=(q_1,1,+1)$$
$$f(q_1,b)=(q_2,b,-1)$$
$$f(q_2,0)=(q_3,b,-1)$$
$$f(q_2,1)=(q_4,b,-1)$$
$$f(q_3,0)=(q_3,0,-1)$$
$$f(q_3,1)=(q_3,1,-1)$$
$$f(q_4,0)=(q_4,0,-1)$$
$$f(q_4,1)=(q_4,1,-1)$$
$$f(q_3,b)=(q_5,b,-1)$$
$$f(q_4,b)=(q_6,b,-1)$$
$$f(q_5,0)=(q_5,0,-1)$$
$$f(q_5,1)=(q_5,1,-1)$$
$$f(q_5,b)=(q_7,0,+1)$$
$$f(q_6,0)=(q_6,0,-1)$$
$$f(q_6,1)=(q_6,1,-1)$$
$$f(q_6,b)=(q_8,1,+1)$$
$$f(q_7,0)=(q_7,0,+1)$$
$$f(q_7,1)=(q_7,1,+1)$$
$$f(q_7,b)=(q_9,b,+1)$$
$$f(q_8,0)=(q_8,0,+1)$$
$$f(q_8,1)=(q_8,1,+1)$$
$$f(q_8,b)=(q_{10},b,+1)$$
$$f(q_9,0)=(q_9,0,+1)$$
$$f(q_9,1)=(q_9,1,+1)$$
$$f(q_9,b)=(q_2,0,-1)$$
$$f(q_{10},0)=(q_{10},0,+1)$$
$$f(q_{10},1)=(q_{10},1,+1)$$
$$f(q_10,b)=(q_2,1,-1)$$
$$f(q_2,b)=(q_{11},b,+1)$$
$$f(q_{11},0)=(q_{12},0,-1)$$
$$f(q_{11},1)=(q_{13},1,-1)$$
$$f(q_{12},b)=(q_{14},0,+1)$$
$$f(q_{13},b)=(q_{15},1,+1)$$
$$f(q_{14},0)=(q_{11},b,+1)$$
$$f(q_{14},1)=(q_{11},b,+1)$$
$$f(q_{14},b)=(q_-,b,+1)$$
$$f(q_{15},0)=(q_{11},b,+1)$$
$$f(q_{15},1)=(q_{11},b,+1)$$
$$f(q_{15},b)=(q_-,b,+1)$$
$$f(q_{11},b)=(q_+,b,+1)$$

Коментар: Нека је стање q_3 стање у ком је глава прочитала цифру 0, а стање q_4 стање у ком је глава прочитала цифру 1. Број преписујемо са леве стране оригиналног броја, остављајући један бланко знак између њих који ће их одвајати. Када извршимо пребацивање броја, оригинални број померимо за једну ћелију у лево како бисмо обрисали бланко знак између бројева.

1.б Дати број у инверзном поступку

Решење:

$$f(q_0,0)=(q_1,0,+1)$$
$$f(q_0,b)=(q_1,1,+1)$$
$$f(q_1,0)=(q_1,0,+1)$$
$$f(q_1,1)=(q_1,1,+1)$$
$$f(q_1,b)=(q_2,b,-1)$$
$$f(q_2,0)=(q_3,b,+1)$$
$$f(q_2,1)=(q_4,b,+1)$$
$$f(q_3,0)=(q_3,0,+1)$$
$$f(q_3,1)=(q_3,1,+1)$$
$$f(q_3,b)=(q_5,0,-1)$$
$$f(q_4,0)=(q_4,0,+1)$$
$$f(q_4,1)=(q_4,1,+1)$$
$$f(q_4,b)=(q_6,1,-1)$$
$$f(q_5,0)=(q_5,0,-1)$$
$$f(q_5,1)=(q_5,1,-1)$$
$$f(q_5,b)=(q_2,0,-1)$$
$$f(q_6,0)=(q_6,0,-1)$$
$$f(q_6,1)=(q_6,1,-1)$$
$$f(q_6,b)=(q_2,1,-1)$$
$$f(q_2,b)=(q_+,b,+1)$$

1.ц) први комплемент датог броја

Решење:

$$
\begin{array}{ccc}
f(q_0,0)=(q_1,0,+1) & f(q_5,b)=(q_7,0,+1) & f(q_{10},b)=(q_2,0,-1) \\
f(q_0,1)=(q_1,1,+1) & f(q_6,0)=(q_6,0,-1) & f(q_2,b)=(q_{11},b,+1) \\
f(q_1,0)=(q_1,0,+1) & f(q_6,1)=(q_6,1,-1) & f(q_{11},0)=(q_{12},0,-1) \\
f(q_1,1)=(q_1,1,+1) & f(q_6,b)=(q_8,1,+1) & f(q_{11},1)=(q_{13},1,-1) \\
f(q_1,b)=(q_2,b,-1) & f(q_7,0)=(q_7,0,+1) & f(q_{12},b)=(q_{14},0,+1) \\
f(q_2,0)=(q_3,b,-1) & f(q_7,1)=(q_7,1,+1) & f(q_{13},b)=(q_{15},1,+1) \\
f(q_2,1)=(q_4,b,-1) & f(q_7,b)=(q_9,b,+1) & f(q_{14},0)=(q_{11},b,+1) \\
f(q_3,0)=(q_3,0,-1) & f(q_8,0)=(q_8,0,+1) & f(q_{14},1)=(q_{11},b,+1) \\
f(q_3,1)=(q_3,1,-1) & f(q_8,1)=(q_8,1,+1) & f(q_{14},b)=(q_-,b,+1) \\
f(q_4,0)=(q_4,0,-1) & f(q_8,b)=(q_{10},b,+1) & f(q_{15},0)=(q_11,b,+1) \\
f(q4,1)=(q_4,1,-1) & f(q_9,0)=(q_9,0,+1) & f(q_{15},1)=(q_11,b,+1) \\
f(q_3,b)=(q_5,b,-1) & f(q_9,1)=(q_9,1,+1) & f(q_{15},b)=(q_-,b,+1) \\
f(q4,b)=(q_6,b,-1) & f(q_9,b)=(q_2,1,-1) & f(q_{11},b)=(q_+,b,+1) \\
f(q_5,0)=(q_5,0,-1) & f(q_{10},0)=(q_{10},0,+1) & \\
f(q_5,1)=(q_5,1,-1) & f(q_{10},1)=(q_{10},1,+1) &
\end{array}
$$

1.д) Тјурингова машина ради са азбуком $S = \{0, 1, b\}$,где је b празан симбол. Нека се на траци Тјурингове мапине број $n\epsilon N_0$ представља својим бинарним записом,између два празна симбола. У све остале ћелије је уписан празан симбол. Нека се глава Тјурингове машине налази над крајњим левим знаком задатог броја. Конструисати програм за Тјурингову машину $f : Q \times S \to Q \cup q_+, q_- \times S \times +1, -1$ којим се у продужетку броја исписује други комплемент датог броја.

Решење:

$$
\begin{array}{ccc}
f(q_0,0)=(q_1,0,+1) & f(q_5,b)=(q_7,0,+1) & f(q_{10},b)=(q_{12},1,-1) \\
f(q_0,1)=(q_1,1,+1) & f(q_6,0)=(q_6,0,-1) & f(q_{12},0)=(q_{13},b,-1) \\
f(q_1,0)=(q_1,0,+1) & f(q_6,1)=(q_6,1,-1) & f(q_{12},1)=(q_{14},b,-1) \\
f(q_1,1)=(q_1,1,+1) & f(q_6,b)=(q_8,1,+1) & f(q_{13},0)=(q_{13},0,-1) \\
f(q_1,b)=(q_2,b,-1) & f(q_7,0)=(q_7,0,+1) & f(q_{13},1)=(q_{13},1,-1) \\
f(q_2,0)=(q_3,b,-1) & f(q_7,1)=(q_7,1,+1) & f(q_{13},b)=(q_{15},b,-1) \\
f(q_2,1)=(q_4,b,-1) & f(q_7,b)=(q_9,b,+1) & f(q_{15},0)=(q_{15},0,-1) \\
f(q_3,0)=(q_3,0,-1) & f(q_8,0)=(q_8,0,+1) & f(q_{15},1)=(q_{15},1,-1) \\
f(q_3,1)=(q_3,1,-1) & f(q_8,1)=(q_8,1,+1) & f(q_{15},b)=(q_{19},1,+1) \\
f(q_4,0)=(q_4,0,-1) & f(q_8,b)=(q_{10},b,+1) & f(q_{18},0)=(q_{18},0,+1) \\
f(q_4,1)=(q_4,1,-1) & f(q_9,0)=(q_9,0,+1) & f(q_{18},1)=(q_{18},1,+1) \\
f(q_3,b)=(q_5,b,-1) & f(q_9,1)=(q_9,1,+1) & f(q_{18},b)=(q_{20},b,+1) \\
f(q_4,b)=(q_6,b,-1) & f(q_9,b)=(q_2,0,-1) & f(q_{20},0)=(q_{20},0,+1) \\
f(q_5,0)=(q_5,0,-1) & f(q_{10},0)=(q_{10},0,+1) & f(q_{20},1)=(q_{20},1,+1) \\
f(q_5,1)=(q_5,1,-1) & f(q_{10},1)=(q_{10},1,+1) & f(q_{20},b)=(q_{12},1,-1)
\end{array}
$$

$f(q_{19},0)=(q_{19},0,+1)$
$f(q_{19},1)=(q_{19},1,+1)$
$f(q_{19},b)=(q_{21},b,+1)$
$f(q_{21},0)=(q_{21},0,+1)$
$f(q_{21},1)=(q_{21},1,+1)$
$f(q_{14},1)=(q_{14},1,-1)$
$f(q_{14},b)=(q_{16},b,-1)$
$f(q_{16},0)=(q_{16},0,-1)$
$f(q_{16},1)=(q_{16},1,-1)$
$f(q_{16},b)=(q_{18},0,+1)$
$f(q_{17},1)=(q_{23},b,-1)$
$f(q_{22},b)=(q_{12},0,+1)$
$f(q_{23},b)=(q_{12},1,+1)$
$f(q_{17},b)=(q_{+},b,+1)$
$f(q_{21},b)=(q_{12},0,-1)$
$f(q_{14},0)=(q_{14},0,-1)$
$f(q_{12},b)=(q_{17},b,+1)$
$f(q_{17},0)=(q_{22},b,-1)$

2. Тјурингова машина ради са азбуком S=0,1,b ,где је b празан симбол.Нека се на траци Тјурингове машине налази 0 између два бланко знака.У све остале ћелије је уписан празан симбол.Нека се глава Тјурингове машине налази изнад 0.Конструисати програм за Тјурингову машину f : Q×S → Q ∪ q+,q-×S× +1,−1 којим се исписује Thue-Morseov niz : 0110100110010110...

Решење:

$f(q_0,0)=(q_1,0,+1)$
$f(q_1,b)=(q_2,1,+1)$
$f(q_2,b)=(q_3,1,+1)$
$f(q_3,b)=(q_4,0,+1)$
$f(q_4,b)=(q_5,1,+1)$
$f(q_5,b)=(q_6,0,+1)$
$f(q_6,b)=(q_7,0,+1)$
$f(q_7,b)=(q_8,1,+1)$
$f(q_8,b)=(q_9,1,+1)$
$f(q_9,b)=(q_{10},0,+1)$
$f(q_{10},b)=(q_{11},0,+1)$
$f(q_{11},b)=(q_{12},1,+1)$
$f(q_{12},b)=(q_1,0,+1)$

Коментар: Трака на почетку изгледа овако: ...$bbbb0bbbb\ldots$, глава се налази изнад 0. Уочимо да се пар 01 односно 10, понавља наизменично у овом низу, стога попунимо првих пар ћелија и иввршимо рекурзију и тиме смо обезбедили да се програм бесконачно понавља.

3. Тјурингова машина ради са азбуком $S=\{0,1,b\}$,где је b празан симбол. Нека се на траци Тјурингове машине налази 0 између два бланко знака. У све остале ћелије је уписан празан симбол. Нека се глава Тјурингове машине налази изнад 0. Конструисати програм за Тјурингову машину $f: Q\times S\to Q\cup\{q+,q-\}\times S\times\{+1,-1\}$ којим се исписује низ 010110111011110111110...

Решење:

$f(q_0,0)=(q_1,0,+1)$
$f(q_1,b)=(q_2,1,+1)$
$f(q_2,b)=(q_3,0,+1)$
$f(q_3,b)=(q_4,1,-1)$
$f(q_4,0)=(q_5,0,-1)$
$f(q_5,1)=(q_6,b,+1)$
$f(q_5,b)=(q_5,b,-1)$
$f(q_6,b)=(q_6,b,+1)$

$f(q_6, 0) = (q_7, 0, +1)$
$f(q_7, 1) = (q_7, 1, +1)$
$f(q_7, b) = (q_8, 1, -1)$
$f(q_8, 1) = (q_8, 1, -1)$
$f(q_8, 0) = (q_9, 0, -1)$
$f(q_9, b) = (q_9, b, -1)$
$f(q_9, 1) = (q_6, b, +1)$
$f(q_9, 0) = (q_{10}, 0, +1)$
$f(q_{10}, b) = (q_{10}, 1, +1)$
$f(q_{10}, 0) = (q_{11}, 0, +1)$
$f(q_{11}, 1) = (q_{11}, 1, +1)$
$f(q_{11}, b) = (q_3, 0, +1)$

4. Тјурингова машина ради са азбуком $S = \{0, 1, b\}$,где је b празан симбол. Нека се на траци Тјурингове машине налази 0 између два бланко знака. У све остале ћелије је уписан празан симбол. Нека се глава Тјурингове машине налази изнад 0. Конструисати програм за Тјурингову машину $f : Q \times S \to Q \cup \{q_+, q_-\} \times S \times \{+1, -1\}$којим се исписује Fibonacc-ијев низ 0110110111011111011111101111111110...

Решење:

$f(q_0, 0) = (q_1, 0, +1)$
$f(q_1, b) = (q_2, 1, +1)$
$f(q_2, b) = (q_3, 1, +1)$
$f(q_3, b) = (q_{19}, 0, +1)$
$f(q_{19}, b) = (q_{19}, 1, -1)$
$f(q_{19}, 0) = (q_4, 0, -1)$
$f(q_4, 1) = (q_5, b, -1)$
$f(q_5, b) = (q_5, b, -1)$
$f(q_5, 0) = (q_9, b, -1)$
$f(q_5, 1) = (q_6, b, +1)$
$f(q_6, b) = (q_6, b, +1)$
$f(q_6, 0) = (q_7, 0, +1)$
$f(q_7, 1) = (q_7, 1, +1)$
$f(q_7, b) = (q_8, 1, -1)$
$f(q_8, 1) = (q_8, 1, -1)$
$f(q_8, 0) = (q_5, b, -1)$
$f(q_9, 1) = (q_{12}, b, -1)$
$f(q_{12}, b) = (q_{12}, b, -1)$
$f(q_{12}, 1) = (q_{13}, b, +1)$
$f(q_{13}, b) = (q_{13}, b, +1)$
$f(q_{13}, 0) = (q_{14}, 0, +1)$
$f(q_{14}, b) = (q_{14}, 0, +1)$
$f(q_{14}, b) = (q_{14}, b, +1)$
$f(q_{14}, 0) = (q_{15}, 0, +1)$
$f(q_{15}, 1) = (q_{15}, 1, +1)$
$f(q_{15}, b) = (q_{16}, 1, -1)$
$f(q_{16}, b) = (q_{16}, b, -1)$
$f(q_{16}, 0) = (q_{12}, 0, -1)$
$f(q_9, b) = (q_{10}, b, +1)$
$f(q_7, b) = (q_8, 1, -1)$

$f(q_{10}, b) = (q_{11}, 0, +1)$
$f(q_{10}, b) = (q_{11}, 0, +1)$
$f(q_{11}, b) = (q_{11}, 1, +1)$
$f(q_{12}, 0) = (q_{17}, 0, +1)$
$f(q_{17}, 0) = (q_{18}, 0, +1)$
$f(q_{17}, b) = (q_{17}, 1, +1)$
$f(q_{18}, b) = (q_{11}, 1, +1)$
$f(q_{11}, 0) = (q_{20}, 0, +1)$
$f(q_{11}, 1) = (q_{11}, 1, +1)$
$f(q_{20}, b) = (q_{20}, 1, -1)$
$f(q_{20}, 0) = (q_4, 0, -1)$

5. Тјурингова машина ради са азбуком $S = \{0, 1, b\}$,где је b празан симбол. Нека се на траци Тјурингове машине налази 1 између два бланко знака. У све остале ћелије је уписан празан симбол. Нека се глава Тјурингове машине налази изнад 1. Конструисати програм за Тјурингову машину $f : Q \times S \to Q \cup \{q+, q-\} \times S \times \{+1, -1\}$ којим се исписује низ нула и јединица,код кога се јединица налази на p-тој позицији,уколико је j ϵN прост број.

Напомена: Задатак се може решити уз помоћ Ератостеновог сита (поступак за одређивање простих бројева мањих од неког задатог броја n).

Алгоритам
1. Напишите све бројеве од 2 до n.
2. Почевши од првог броја на списку (двојка) прецртајте са списка све бројеве дељиве са два и упишите да је двојка прост број.
3. Понављајте поступак са следећим непрецртаним бројем m. Дакле, прецртајте све бројеве дељиве са m, а њега самог обележите да је прост.

Решење:

$$
\begin{array}{ccc}
f(q_0,1)=(q_1,b,+1) & f(q_7,b)=(q_8,0,+1) & f(q_{16},0)=(q_{16},0,-1)\\
f(q_1,b)=(q_2,1,+1) & f(q_8,0)=(q_6,0,+1) & f(q_{16},b)=(q_{16},b,-1)\\
f(q_2,b)=(q_3,b,+1) & f(q_8,b)=(q_6,b,+1) & f(q_{16},1)=(q_{17},1,+1)\\
f(q_3,b)=(q_2,0,+1) & f(q_6,1)=(q_9,1,-1) & f(q_{17},0)=(q_{17},0,+1)\\
f(q_2,0)=(q_4,0,-1) & f(q_9,0)=(q_9,0,-1) & f(q_{17},b)=(q_{18},1,+1)\\
f(q_4,0)=(q_4,0,-1) & f(q_9,b)=(q_9,b,-1) & f(q_k,0)=(q_{k+1},0,+1)\\
f(q_4,b)=(q_4,b,-1) & f(q_9,1)=(q_{10},1,+1) & f(q_k,b)=(q_{k+1},b,+1)\\
f(q_4,1)=(q_5,1,+1) & f(q_{10},0)=(q_{10},0,+1) & .\\
f(q_5,b)=(q_5,1,+1) & f(q_i,0)=(q_{i+1},0,+1) & .\\
f(q_5,0)=(q_6,0,+1) & f(q_i,b)=(q_{i+1},b,+1) & .\\
f(q_6,b)=(q_7,b,+1) & . & f(q_{k+r},0)=(q_k,0,+1)\\
f(q_6,0)=(q_7,0,+1) & . & f(q_{k+r},b)=(q_k,0,+1)\\
f(q_7,0)=(q_8,0,+1) & . & f(q_k,1)=(q_{25},1,-1)\\
 & f(q_{i+j},0)=(q_i,0,+1) & f(q_{25},0)=(q_{25},0,-1)\\
 & f(q_{i+j},b)=(q_i,0,+1) & f(q_{25},b)=(q_{25},b,-1)\\
 & f(q_i,1)=(q_{16},1,-1) & f(q_{25},1)=(q_{26},1,+1)\\
 & f(q_{26},0)=(q_{26},0,+1) & \\
 & f(q_{26},b)=(q_{26},1,+1) &
\end{array}
$$

где су :
$i=11, j\epsilon[1,4]$
$k=18, r\epsilon[1,6]$
$f(q_6,1), f(q_i,1), f(q_k,1)$ су претпоставке да је глава дошла до краја траке и да треба да се врати уназад.

Појашњење:

Глава Тјурингове машине се налази изнад прве јединице,а трака је облика ...bbbb1bbbb...
Први прост број је 2,тако да ћемо у другу ћелију уписати јединицу.Затим ћемо у сваку ћелију чији је редни број који је дељив са 2 уписати 0,с претпоставком да попуњавамо траку до броја 120.
Када упишемо последњу нулу у ћелију са редним бројем 120,враћамо се назад до јединице коју смо уписали у ћелију са редним бројем 2.
На исти начин радимо и са следећим простим бројем,а то је 3.У ћелију са редним бројем 3 уписујемо 1,па затим у сваку ћелију чији је редни број дељив са 3 уписујемо 0.
Аналогно радимо и за 5,7.

5 Литература

https://startit.rs/
https://www.wikipedia.org/
"Увод у теоријско рачунарство- Зоран Огњановић, Ненад Крџавац