Elektrotehnički Fakultet Beograd
projektni zadatak iz Složenosti algoritma I odabranih metoda optimizacije
prolećni semestar 2020. godine

Lenka Ristivojević 2018/0109, Andrija Firez 2018/0163

ALAN TJURING I TJURINGOVA MAŠINA

„Those who can imagine anything can create the impossible.“
-Alan Turing

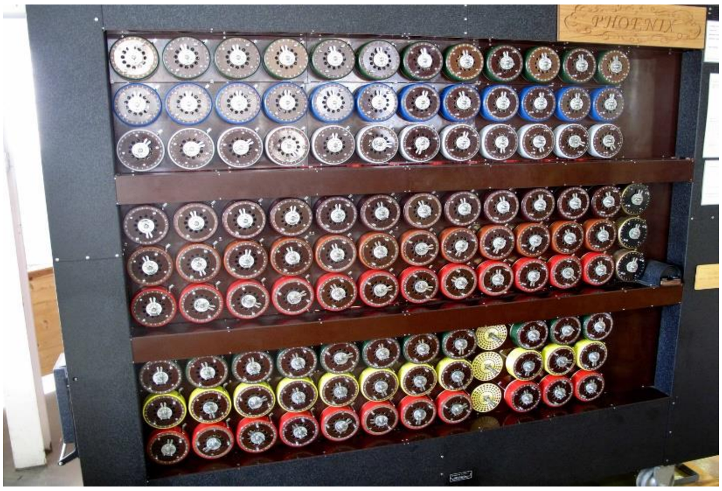
1. ŽIVOT ALANA TJURINGA

Stvaralac Tjuringove mašine I kako se danas naziva otac modernog računarstva bio je Alan Tjurining, engleski matematičar rođen 1912. godine. Izuzetno svestrana ličnost koja je ostavila traga u matematici, kriptoanalizi, logici, filozofiji, biologiji I u mnogim oblastima koje u njegovo vreme nisu ni postojale, već su se zahvaljujući njegovom doprinosu kasnije razvile u prave nauke.

Još kao mali dečak pokazivao je veliko interesovanje za brojeve I znao mnogo više nego što se očekuje od deteta njegovih godina, međutim u to vreme interesovanje za matematiku nije bilo na velikoj ceni pa je često bio omalovažavan od svojih učitelja, na sreću to ga nije obeshrabrilo da nastavi da se bavi prirodnim naukama, pa tako 1938. godine diplomira na Prinston Univerzitetu, I nakon toga nastavlja da radi na svom obrazovanju, vraća se na Kembridž gde pohađa časove fundamentalne matematike.

S obzirom na period u kojem je živeo, veliki uticaj na Tjuringov život I karijeru imao je Drugi svetski rat. U to vreme , Alan Tjuring je radio u britanskom kriptoanalitičkom centru, Blečli parku, I bio je šef odeljenja zaduženog za nemačku mornaricu. Uporedno oružanim sukobima koji su se vodili na zemlji I na nebu bio je važan I tihi rat. Tim koji je predvodio Tjuring zajedno sa Dilvinom Noksom bio je zadužen za razotkrivanjem mašine pod imenom Enigma, koju je nemačka vojska koristila za prenošenje tajnih poruka. Fizičko srce enigme bili su rotori koji su se okretali različitim brzinama. Svaki rotor je mogao da se nađe u 26 različitih položaja. U slučaju najjednostavnije Enigme, postojala su tri rotora, tako da je ukupan broj stanja u kojima su mogli da se nađu rotori bio 26^3=17 576. Pomorske Enigme imale su I do osam rotora, što značajno povećava broj kombinacija. Za tumačenje poruke poslate jendom Enigmom, operater sa druge strane morao je da ima identičnu mašinu I da zna njenu početnu postavku, a Nemci su početno stanje menjali svakog meseca. Situaciju je dodatno komplikovalo što se pritiskom dugmeta tastature kod menjao tako što se menjala pozicija rotora. Međutim, Enigma je imala I slabe tačke. Jedna je bila što dato slovo nikada nije bilo kodirano istim tim slovom, na primer, ako bismo pritisli slovo „a“ na tastaturi nikada kao njegovu šifrovanu zamenu ne bismo dobili slovo „a“. Drugi izvor ranjivosti je bio što su se neke faze ponavljale, Nemci su svako jutro slali meterološki izveštaj, tako da su poruke često sadržale reči „vreme danas“ I „Hail Hitler“. Tjuring je svoj dizajn Bombe, mašine koja je služila za dekodiranje poruka, bazirao na matematičkoj kontradikciji, traženo stanje nije moglo da rezultira time da se jedno slovo menja istim tim slovom. Dakle, Bomba je tragala za tačnim postavkama odnosno kodom I odbacivala one postavke koje su davale isto slovo za dato slovo. Većina mogućih postavki je bila kontradiktorna, te su ih odbacivali, pa je ostajalo samo nekoliko koje je imalo smisla detaljno proveriti. Određeni istoričari tvrde da je uspeh dešifrovanja Enigme skratio ceo

Drugi svetski rat za par meseci, možda čak I za jednu godinu I tako smanjio već ogromne posledice ovog užasnog razaranja.



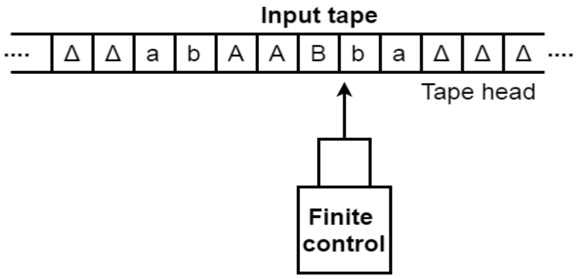
Slika 1: Bomba, mašina koja je razrešila Enigmu

Sa filozofske strane, izuzetno je zanimljiv rad „Računarske mašine I inteligencija“ koji je Alan Tjuring objavio 1950. godine. Ovaj rad se bavi problemom veštačke inteligencije, terminom koji u to vreme još nije ni postojao.Glavno pitanje ovog rada bilo je „Da li mašine mogu da misle?“. Tjuring je još ranije došao do zaključka da ono što mogu neuroni u mozgu, mogu I tranzistori u računaru. Odnosno pošto je već postavio pretpostavku da mozak radi na mehaničkoj osnovi I da mašina može da simulira njegov rad, smatrao je da postoji formula po kojoj se odvija proces mišljenja. U ovom radu se prvu put pojavio Tjuringov test, po njemu je mašinu moguće proglasiti inteligentom ako čovek ne može da uvidi razliku između odgovora koje dobija od mašine I drugog čoveka. Otkako je Tjuring prvi put predstavio svoj test, pokazalo se da je veoma uticajan, ali I široko kritikovan. A zaključak samog tvorca testa je: „Razmišljanje je funkcija čovečije besmrtne duše. Bog je dao besmrtnu dušu svim muškarcima I ženama, ali ne I bilo kojoj drugoj životinji ili mašini. Stoga nijedna životinja ni mašina ne mogu da razmišljaju.“

2. HILBERTOVO PITANJE I NASTANAK TJURINGOVE MAŠINE

Mnogo pre nego što će Tjuring postati poznat u naučnim krugovima, pre I samog Drugog svetskog rata, dok je još uvek bio mlad I sa premalo radova iza sebe koji pri tome ni na šta konkretno nisu bili primenjeni, Tjuring je počeo da traga za odgovorima na pitanja: šta je mentalni proces, kako razmišljanjem stižemo do zaključaka, šta naš mozak radi dok razmišljamo? Osim njega, još neki naučnici su se bavili „nepraktičnim“ delovima matematike, pokušavajući da dokažu da li su neke od najpoznatijih matematičkih teorema nedokazive. Izuzetno su bila popularna pitanja Dejvida Hilberta: 1. Da li je matematika kompletna? 2. Da li je konzistentna I 3. Da li je odlučiva? Na prva dva je 1930. godine neočekivano odgovorio matematičar Kurt Gedel I pokazao da nijedan matematički sistem nije zatvoren I da će uvek biti onih tvrdnji koje se ne mogu dokazati, što je izazvalo depresiju među matematičarima.
Alan Tjuring se posebno zanimao za treće, neodgovreno pitanje, poznato I pod nazivom *Entscheidungsproblem*, tj. problem odluke. Odnosno, pitanje je bilo, da li postoji metod odlučivanja za svaku matematičku tvrdnju koji bi davao izlaz u vidu „istina“ ili „neistina“ u zavisnosti od toga da li je tvrdnja tačna ili ne. Naći odgovor na ovo pitanje nije bilo jednostavno, čemu svedoči I činjenica da je od Gedelovih odgovora do Tjuringovog zanimanja za problem prošlo sedam godina, a da ga niko nije rešio, čak se jedno vreme mislilo da odgovor na to pitanje neće niko pronaći. Najpre je trebalo da se definiše šta je to metod, da bi to odradio Tjuring je zamislio da je metod nešto što može da se uradi mehanički. A ukoliko je nešto mehaničko onda to može da

uradi I mašina. Smatralo se da svaki logički proces može da se raščlani na najjednostavnije komponente. Svaka od ovih komponenti bi se izvodila sekvencijalno, pa bi ova mašina mogla da odgovori na pitanje odlučivosti. Naravno, ništa ni blizu takve mašine nije postojalo tridesetih godina prošlog veka, sve je bilo produkt Tjuringovog misaonog eksperimenta.
On je zamislio beskonačno dugu traku sa ćelijama u kojima se nalaze nule, jedinice ili blanko znak na osnovu kojih se mašina kretala gore-dole, levo-desno.



Slika 2: Tjuringova mašina

Bila je to jednostavna mašina sa konačnim brojem stanja, svako stanje je upućivalo šta će da se desi ako se nula zameni jedinicom, jedinica nulom ili se ostavi onako kako jeste. Tim jednostavnim radnjama pokazano je da može da postoji mehanički uređaj koji će izračunavati iste zadatke kao čovek. Ta mašina je danas poznata kao Tjuringova mašina, I iako nije stvarno bila napravljena, unela je revoluciju kao koncept, praktično je definisala ono što će kansije biti shvaćeno kao kompjuterski algoritam. Tjuring ne samo da je osmislio jednu mašinu, već je I svakom mogućem od beskonačnog broja zadataka namenio po jednu mašinu. Iz toga se rodila ideja o univerzalnoj mašini koja je mogla da čita I izvršava zadatke svake od tih pojedinačnih mašina I tako izvodi sve moguće logičke zadatke. S Tjuringom je rođena matematička logika, prvi put se mislilo o algoritmima I računarima. A što se tiče trećeg Hilbertovog problema, uz pomoć univerzalne Tjuringove mašine je dokazano da je odgovor negativan, odnosno da matematika nije odlučiva. Drugim rečima, konačan metod koji bi na osnovu ulaza dao izlaz u formi istine ili laži ne postoji. Tjuringov rad je objasnio da je preko algoritma nemoguće doneti odluku da li su aritmetičke tvrdnje tačne jer mašina nahranjena podacima može da oponaša samo njima opisano stanje. Bez obzira što je odgovor bio negativan, cela priča je dovela do velikog napretka, jer je stvarajući ovu mašinu Tjuring praktično postavio temelj za ono što će kasnije biti softver računara.

3. METODE EKVIVALENTNE TJURINGOVOJ MAŠINI

Pored Tjuringove mašine, nekoliko drugih modela je uvedeno nezavisno od Tjuringa u kontekstu istraživanja osnova matematike što je rezultiralo tezama koje su ekvivalentne Tjuringovoj tezi

1. Rekurzivne funkcije:
   μ-rekurzivne funkcije su parcijalne funkcije koje uzimaju konačne zapise prirodnih brojeva I vraćaju jedan prirodan broj. One su najmanja klasa parcijalnih funkcija koje uključuju početne funkcije I zatvorene su pod sastavom, primitivne rekurzije i operacije μ. Čerč je iskoristio rekurziju kako bi definisao svoju drugu tezu: funkcija je intuitivno izračunljiva ako I samo ako je rekurzivna

2. Lambda račun:
   Lambda račun je prvi uveo Čerč da bi formulisao koncept efektivnog računanja, I naišao je na prve uspehe na polju teorije računanja kada je uspeo kao I Tjuring da negativno odgovori na treći Hilbertov problem. Lambda račun je konceptualno jednostavan model računanja I Tjuring je pokazao da je Tjuringova mašina u ekspresivnosti jednaka lambda računu.

S obzirom da je λ-račun postao osnova funkcionalnih programskih jezika, pokušaćemo malo bliže da ga objasnimo. Jedine sintaksne celine u λ-računu su λ-izrazi koji mogu biti: konstante, imena promenljivih, i apstrakcije oblika *λ ime promenljive.λ-izraz*. To je to, ne postoje brojevi, stringovi, Bulove promenljive. Svaka vrednost je funckija koja uzima jedan argument, sve promenljive se odnose na ove funkcije, a sve što funkcije mogu da urade je da vrate drugu funkciju, bilo direktno ili pozivanjem neke druge funkcije. Pozivanje funkcije u mnogim jezicima izgleda kao *f(x)*, ali u λ-računu to izgleda kao *(f x)*, odnosno *(λx.x y)*.
Brojeve predstavljamo preko nečeg što se zove Čerčov-numeral: ako imamo samo f i x, ideja je da se broj predstavlja preko broja puta koliko pozivamo funkciju. Znači da bismo predstavili nulu, uopšte ne pozivamo f . Dakle:
0 = λf. λx. x
1 = λf. λx. (f x)
2 = λf. λx. (f (f x))
3 = λf. λx. (f (f (f x))) i tako dalje…

Pokušaćemo da predstavimo jednu osnovnu rekurzivnu funkciju, funkciju sledbenika: $S: N_0 \rightarrow N_0, \ \ (\forall x \in N_0) S(x) = x + 1$ na Tjuringovoj mašini i pomoću λ-računa.
Tjuringova mašina u binarnom sistemu:
$f(q_0, b)=(q_-, b, +1)$
$f(q_0, 0)=(q_1, 1, +1)$
$f(q_0, 1)=(q_1, 1, +1)$
$f(q_1, b)=(q_2,b, -1)$
$f(q_1, 0)=(q_1, 0, +1)$
$f(q_1, 1)=(q_1, 1, +1)$
$f(q_2, b)=(q_-, b, +1)$
$f(q_2, 0)=(q_+, 1, +1)$
$f(q_2, 1)=(q_3, 0, -1)$
$f(q_3, b)=(q_+, 1, +1)$
$f(q_3, 0)=(q_+, 1, +1)$
$f(q_3, 1)=(q_3, 0, -1)$

Funckija sledbenika u λ-računu se definiše kao: $succ = \ \lambda\mathrm{n.}\ \lambda\mathrm{f.}\ \lambda\mathrm{x.}\left(\mathrm{f}\left((\mathrm{n\ \ f})\ \mathrm{x}\right)\right)$. Pokušaćemo da raščlanimo ovaj izraz, n je Čerčov-numeral, a funkcija *succ* vraća drugi Čerčov-numeral $\lambda\mathrm{f.}\ \lambda\mathrm{x.}\left(\mathrm{f}\left((\mathrm{n\ \ f})\ \mathrm{x}\right)\right)$. Deo $\left((\mathrm{n\ \ f})\ \mathrm{x}\right)$ poziva n sa dva argumenta f i x, ovo poziva f n puta. $\left(\mathrm{f}\left((\mathrm{n\ \ f})\ \mathrm{x}\right)\right)$ ovaj deo poziva ponovo f, još jednom, sa rezultatom prethodne vrednosti.

Pokušaćemo da nađemo sledbenik broja 1:
$$\left(succ\ \lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\,x})\right) \rightarrow$$
$$\left(\lambda\mathrm{n.}\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}\left(\mathrm{f}\left((\mathrm{n\,f})\mathrm{x}\right)\right)\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\,x})\right) \rightarrow$$
$$\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}\left(\mathrm{f}\left((\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\,x})f)x\right)\right)$$
Deo funckije $(\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\,x})f)$ ćemo pojednostaviti pozivanjem funkcije i zamenom f sa f $\rightarrow \lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\,x})$.
Pokušaćemo sada da sredimo veći deo $\left((\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\ \ x})f)\ x\right) \rightarrow (\lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\ \ x})\ x) \rightarrow (f\ \ x)$ pozivanjem funkcije i menjanjem x sa x.
Ako sada ovo ubacimo u izraz koji smo dobili $\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}\left(\mathrm{f}\left((\lambda\mathrm{f.}\lambda\mathrm{x.}(\mathrm{f\ \ x})\ f)\ x\right)\right) \rightarrow\ \lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x))$ što je jednako izrazu za broj 2 koji smo napisali iznad, koji je upravo sledbenik broja 1.

4. PREDNOSTI TJURINGOVE MAŠINE

Tjuringova mašina je bila jedan od prvih modela za programiranje u vreme kada programiranje samo po sebi nije ni postojalo. Postoji nekoliko faktora koji su uticali na to da Tjuringova mašina postane preferiran model u odnosu na ostale u to vreme i samim tim kasnije postane standard:

- Jednostavnost dokaza:
  Kao teoretski model, Tjuringove mašine imaju draž da budu „jednostavne“, u smislu da trenutno stanje mašine ima konstantnu veličinu. Sve veličine koje su nam potrebne da bismo odredili sledeće stanje mašine su jedan simbol i jedan status stanja. Promena stanja mašine je jednako mala, dodajući samo kretanje glave mašine. To značajno pojednostavljuje dokaze, posebno broj slučajeva koje treba razlikovati.

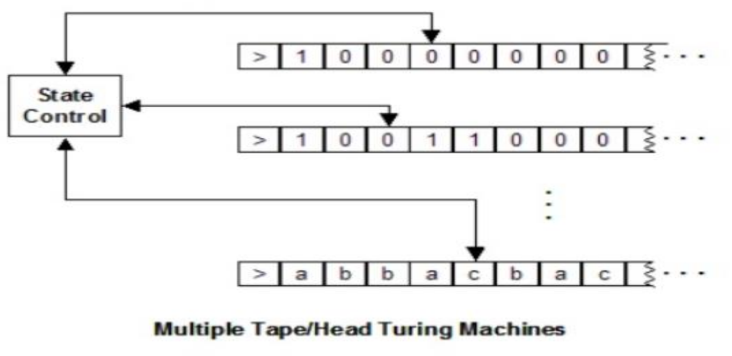
- Vreme izvršenja i iskorišćenost prostora:
  Jedina dva modela koja su odogovorila na isti zahtev kao I Tjuringova mašina, odnosno na treći Hilbertov problem, radile su mnogo sporiije I zauzimale više prostora, na nekin način su bile previše apstarktne da bi se vezale za realni model mašine. S obzirom da su za Tjuringovu mašinu oba pojma jednostavno definisana I da je razmatranje efikasnosti uskoro postalo izuzetno bitno, ovo je definitivno bila jedna od prednosti Tjuringove mašine I razlog zašto se izdvojila u odnosu na ostale modele. Mislim da slobodno možemo reći da je za to vreme predstavljala revolucionarno otkriće.

5. TIPOVI TJURINGOVE MAŠINE

1. *<u>Tjuringova mašina sa dvosmernom beskonačnom trakom:</u>*
   Beskonačna traka dvosmerne Tjuringove mašine navezuje se u oba smera, levo i desno. Ove mašine se mogu simulirati i sa jednostranom beskonačnom Tjuringovom mašinom(standardnom Tjuringovom mašinom).

2. *<u>Tjuringova mašina sa više traka:</u>*
   Ova mašina ima više traka koje se kontrolišu sa jednom glavom. Takođe ju je moguće simulirati pomoću standardne Tjuringove mašine.

3. *<u>Tjuringova mašina sa više glava i više traka:</u>*
   Ova mašina je nadogradnja predhodne, osim osim više traka ona ima i više glava, tako da svakom trakom upravlja posebna glava. Ovo je još jedan oblik Tjuringove mašine koji se može simulirati standardnom Tjuringovom mašinom.



Slika 3: Tjuringova mašina sa više traka/glava

4. *Tjuringova mašina sa multidimenzionalnom trakom:*
   Ova mašina ima multidimenzionalnu traku, gde se glava može kretati u bilo kom smeru, levo, desno, gore ili dole. Tjuringova mašina sa multidimenzionalnom trakom se može simulirati na jednodimenzionalnoj Tjuringovoj mašini.

v	v	v	v	v	v	v	...	...
h	1	2	6	7	15	16	...	...
h	3	5	8	14	17	26	...	...
h	4	9	13	18	25	...	...	...
h	10	12	19	24	...	...	...	...
h	11	20	23	...	...	...	...	...
h	21	22	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Slika 4: Dvodimenzionalna Tjuringova mašina

5. *Tjuringova mašina sa više glava:*
   Ova Tjuringova mašina sadrži dve ili više glava za čitanje simbola na istoj traci. U jednom koraku sve glave prepoznaju skenirane simbole, ali se kreću i pišu nezavisno. Ova mašina takođe predstavlja primer mašine koji se može simulirati standardnom Tjuringovom mašinom.

6. *Nedeterministička Tjuringova mašina:*
   Tjuringova mašina koja nije deterministička ima jednu traku, koja je beskonačna na samo jednom kraju. Za dato stanje i ulazni simbol ima najmanje jedan izbor za pomeranje, a konačan broj izbora za sledeći potez(ima nekoliko izbora za svaki sledeći put koji može da sledi za dati ulazni niz). Ova mašina ima jednaku snagu kao i deterministička Tjuringova mašina.

Kako bismo bliže objasnili funkcionisanje različitih tipova Tjuringove mašine i njihovo svođenje na standardnu Tjuringovu mašinu, pokazaćemo rešavanje jednog lakšeg problem na Tjuringovoj mašini sa dva pokazivača i na klasičnoj Tjuringovoj mašini. Cilj problema je odrediti da li je broj palindrom.
Kod Tjuringove mašine sa dva pokazivača krećemo sa različitih strana i proveravamo da li su cifre iste, jedan pokazivač se pomera udesno, a jedan ulevo. Ako su oba pokazivača na 11 ili 00 onda ulazimo u stanje q_1, a u ostalim slučajevima idemo u stanje q_2, preko svih pročitanih cifara ispisujemo blanko znak. Kada naiđemo na dva blanko znaka, to znači da su se pokazivači mimoišli, odnosno da smo uporedili sve cifre, ako smo u tom trenutku u stanju q_1 dobijamo ispis 1 što znači da broj jeste palindrom, a ako smo u stanju q_2 dobijamo ispis 0 što znači da broj nije palindrom

Tjuringova mašina sa jednom trakom:
$f(q_0,0)=(q_1, b ,+1)$
$f(q_0,1)=(q_2, b, +1)$
$f(q_0,b)=(q_+, 1, +1)$
$f(q_1\ 0)=(q_1, 0, +1)$
$f(q_1, 1)=(q_1, 1, +1)$
$f(q_1, b)=(q_3, b, -1)$
$f(q_2, 0)=(q_2, 0, +1)$
$f(q_2, 1)= (q_2, 1, +1)$
$f(q_2, b)=(q_4, b, -1)$
$f(q_3, 0)=(q_5, b, -1)$

Tjuringova mašina sa dva pokazivača:
$f(q_0, 1, 1)=(q_1, b, b, +1, -1)$
$f(q_0, 0, 1)=(q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_0, 1, 0)=(q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_0, 0, 0)=(q_1, b, b, +1, -1)$
$f(q_2, 1, 1)= (q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_2, 0, 1) =(q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_2, 1, 0)=(q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_2, 0, 0) =(q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_2, b, b)=(q_+, 0, b, +1 -1)$
$f(q_1, 1, 1)=(q_1, b, b, +1, -1)$

$f(q_4, 1) = (q_5, b, -1)$
$f(q_3, 1) = (q_6, b, -1)$
$f(q_4, 0) = (q_6, b, -1)$
$f(q_3, b) = (q_+, 1, +1)$
$f(q_4, b) = (q_+, 1, +1)$
$f(q_6, 1) = (q_6, b, -1)$
$f(q_6, 0) = (q_6, b, -1)$
$f(q_6, b) = (q_+, 0, +1)$
$f(q_5, 1) = (q_5, 1, -1)$
$f(q_5, 0) = (q_5, 0, -1)$
$f(q_5, b) = (q_0, b, +1)$

$f(q_1, 0, 1) = (q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_1, 1, 0)\ (q_2, b, b, +1, -1)$
$f(q_1, 0, 0) = (q_1, b, b, +1, -1)$
$f(q_1, b, b) = (q_+, 1, b, +1, -1)$

6. UTICAJ NA RAZVOJ NAUKE

Alan Tjuring je danas jedna od najpoznatijih ličnosti u informatici. Mnogi ga smatraju ocem računarske nauke I činjenica da glavna nagrada u ovoj oblasti nosi Tjuringovo ime jasan je pokazatelj njegovog uspeha. Ime Alan Tjuring je prvo što se pojavljuje tražeći odgovore na pitanja pitanja šta je algoritam ili šta je efikasno računanje. Tjuringova mašina je takođe jedan od glavnih modela za istraživanje širokog spektra poddisciplina informatike kao što su: varijantni I minimalni modeli računanja, teorija složenosti računanja, teorija algoritmičkih informacija.

Kao I većina velikih umova koji su ostavili značajan trag u istoriji, Alajn Tjuring takođe u svoje vreme nije bio prihvaćen, ali ne zbog svojih naučnih metoda, već zbog svog seksualnog opredeljenja, bez obzira što to nije imalo nikave veze sa njegovim postignućima. Zbog toga su čak mnogi njegovi radovi prvobitno pripisivani raznim drugim naučnicima. Osuđen je za delo „velike nepristojnosti“ I primoran da prima horomonsku terapiju. Ovo je Tjuringa u potpunosti izmenilo kao ličnost I nažalost označilo kraj njegovog rada. Smatra se da je 1954. izvršio samoubistvo pojevši jabuku sa cijanidom. Značaj njegovih dela I nepravedna osuda su od strane njegove zemlje prepoznati tek 2013. godine kada ga je kraljica posthumno pomilovala I tako je postao tek četvrta osoba koja je u Ujedinjenom kraljevstvu dobila kraljevsko pomilovanje.
O životu Alana Tjuringa snimljen je film „Enigma“ I napisana knjiga pod nazivom „Čovek koji je suviše znao“, a 2021. godine njegov lik će se naći na novčanici od 50 funti, što nam samo još jednom pokazuje njegovu ogromnu istorijsku važnost.

Reference:

[1] https://plato.stanford.edu/entries/turing-machine/

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Turing_machine

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing

[4] https://www.cs.odu.edu/~toida/nerzic/390teched/tm/othertms.html

[5] https://www.nationalgeographic.rs/vesti/307-tjuringova-masina.html

[6] http://bach.ai/lambda-calculus-for-absolute-dummies/

Rešavanje praktičnog problema primenom Tjuringove mašine

29. mart 2020.

Interesantan primer primene Tjuringove mašine za rešavanje obimnijih zadataka predstavlja program koji popunjava 4x4 sudoku matrice.

Uvod

Pre rešavanja samog zadatka ćemo uvesti sledeće pretpostavke u cilju lakšeg razumevanja programa:

- Zadata sudoku matrica sigurno ima rešenje, tj. zadati brojevi su raspoređeni tako da je moguće matricu ispuniti brojevima na način da su sva sudoku pravila ispunjena
- Podrazumeva se da nema greške u zapisu matrice u Tjuringovu mašinu pa će se shodno tome u programu pojavljivati samo slučajevi koji su od značaja za nastavak programa, odnosno neće se proveravati greške
- Oznaka f (q_i , S \ {a, b}) = ... predstavlja skup slučajeva da se u stanju q_i učita bilo koji od elemenata azbuke izuzev a i b.

Azbuka Tjuringove mašine

Azbuka potrebna za rešavanje ovog zadatka sastoji se od sledećih znakova:

$$S = \{b, 0, 1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44, P, F\}$$

Pri tome je b blanko znak, dvocifreni brojevi predstavljaju koordinatu polja u matrici, gde prva cifra predstavlja broj reda, a druga kolone, P je oznaka za polje matrice u kome se broj može menjati, a F polje u kojem je broj fiksan.

Sudoku pravila

Cilj igre sudoku je da se data matrica popuni tako da se u svakom redu i svakoj koloni određeni broj nađe samo jednom.

Dodatno, isto pravilo važi i za odgovarajuće kvadrate na slici.

Iz ovog razloga je, da bi se utvrdilo da je data kombinacija brojeva ispravna, potrebno izvršiti 12 provera: 4 za redove, 4 za kolone i 4 za kvadrate.

3		4	
	1		2
	4		3
2		1	

Slika 1: Primer

Početno stanje Tjuringove mašine

Sudoku matrica je u Tjuringovoj mašini zapisana na sledeći način: Svako od 16 polja date matrice se opisuje uz pomoć 3 polja na traci Tjuringove mašine:

1. koordinata polja
2. osobina polja
3. vrednost u polju

U koordinati polja nalaze se dvocifreni brojevi iz azbuke, dok se u polju koje opisuje osobinu nalazi P ili F u zavisnosti da li se vrednost broja koji se nalazi u polju može menjati (P-promenljiva vrednost) ili ne(F-fiksna vrednost). Ovo je potrebno kako se ne bi menjali brojevi koji su dati kao uslovi zadatka.

Treba još napomenuti da se u poljima u kojima nisu upisani fiksni brojevi na početku nalaze nule. Na početku programa glava Tjuringove mašine se nalazi na prvom polju različitom od blanko znaka sa leve strane. U poljima na traci koja ne opisuju sudoku matricu nalaze se blanko znaci.

Rešenje zadatka

Postupak rešavanja zadatka možemo podeliti u dve celine:

- Popunjavanje matrice brojevima
- Provera sudoku uslova

Popunjavanje matrice

Ovaj deo koda izvršava sledeće: glava Tjuringove mašine se pomera na desnu stranu(ka kraju) pri čemu svako polje u kome se nalazi nula(nule su inicijalne vrednosti koje promenljiva polja imaju) popunjava sa jedinicom. Zatim se prelazi u proveru. Ukoliko kombinacija ne zadovoljava uslove, program vraća glavu na levo do prvog P znaka. Tada ide jedno mesto udesno, i menja u početnom slučaju jedinicu, a u opštem bilo koju od vrednosti 1,2,3,4. Ukoliko su vrednosti 1,2, ili 3, program ih uveća za jedan, vraća glavu na desni kraj i ponovo ulazi u proveru.

U slučaju da je vrednost u prvoj promenljivoj 4, u nju se upisuje 1, a glava se vraća levo do prvog sledećeg P znaka. Zatim se proces ponavlja ispitujući vrednost u tom polju. Ukoliko polje koje se ispituje nije prvo sa desne strane program svako sledeće polje desno od datog ponovo inicijalizuje na jedinicu. Ovaj postupak se nastavlja sve dok se ne ispitaju sve moguće vrednosti promenljivih polja ili dok se ne dodje do tačnog rešenja.

$$f(q_0, S) = (q_1, isto, +1)$$

$$f(q_1, S\backslash\{0, b\}) = (q_1, isto, +1)$$

$$f(q_1, 0) = (q_1, 1, +1)$$

$$f(q_1, b) = (q_2, b, +1)$$

$$f(q_2, S\backslash\{P, b\}) = (q_2, isto, -1)$$

$$f(q_2, P) = (q_3, P, +1)$$

$$f(q_3, 1) = (q_8, 2, +1)$$

$$f(q_3, 2) = (q_8, 3, +1)$$

$$f(q_3, 3) = (q_8, 4, +1)$$

$$f(q_3, 4) = (q_5, 1, -1)$$

$$f(q_5, P) = (q_6, P, -1)$$

$$f(q_6, S\backslash\{P, b\}) = (q_6, isto, -1)$$

$$f(q_6, P) = (q_3, P, +1)$$

$$f(q_6, b) = (q_-, b, +1)$$

$$f(q_8, S\backslash\{P, b\}) = (q_8, isto, +1)$$

$$f(q_8, P) = (q_9, P, +1)$$

$$f(q_9, \{1, 2, 3, 4\}) = (q_8, 1, +1)$$

$$f(q_8, b) = (q_1, b, -1)$$

Napomena: prelazak u proveru uslova se obavlja preko $f(q_2, b)$.

Provera uslova

Kao što je ranije napomenuto, tačna kombinacija treba da ispunjava 12 uslova. Uslovi su sledeći: vrednosti svakog od data 4 polja moraju biti međusobno različite. Jedina razlika izmedju ovih uslova su koordinate polja koje se ispituju.

Provere će se vršiti tako što ćemo za jedno od data 4 polja pretpostaviti neku vrednost. Zatim ćemo izdvojiti vrednosti koje mogu da se nađu u drugom, onda u trećem i na kraju u četvrtom polju, a da zadovoljavaju uslove provere. Ostale vrednosti znače da data kombinacija nije prošla proveru i da treba isprobati novu kombinaciju. Tako svaku proveru možemo podeliti u 4 bloka, koji predstavljaju vrednost u jednom od izabranih polja. Ukoliko su ispunjene svih 12 uslova, program je uspešno izvršen.

Zbog toga što su provere analogne, a njihov zapis obiman, sada će biti naveden samo jedan blok horizontalne provere prvog reda, odnosno provere za polja sa koordinatama 11, 12, 13 i 14.

U datom primeru ćemo ispitati blok u kome se pretpostavlja da je vrednost u polju sa koeficijentom 11 jednaka 1. Zatim se taj blok može podeliti na 3 podbloka koji zadovoljavaju prethodno postavljene uslove, tako što se razmatraju vrednosti polja sa koeficijentom 12 koje mogu biti 2,3, ili 4. U podbloku u kome je u polju 12 vrednost 2, u polju 13 može da se nadje 3 ili 4, čime se provera deli na podpodblokove. U podpodbloku u kome je vrednost u koeficijentu 13 jednaka 3, jedina ispravna mogućnost za polje sa koeficijentom 14 je 4, dok je u podpodbloku u kome se u polju 13 nalazi 4 jedina ispravna mogućnost za polje 14 jednaka 3.

Ispitivanjem svih podpodblokova, zatim podblokova, a potom i blokova izvršava se jedna od 12 provera. Iako je kod obiman, ovo je potrebno kako provere ne bi zavisile od fiksnih vrednosti pojedine sudoku matrice, već da bi bile univerzalno primenljive na bilo koju sudoku matricu.

Kod provere pocinje sa:

$$f(q_2, b) = (q_{10}, b, -1)$$

$$f(q_{10}, b) = (q_{11}, b, -1)$$

$$f(q_{11}, S\backslash\{b\}) = (q_{11}, isto, -1)$$

$$f(q_{11}, b) = (q_{12}, b, +1)$$

$$f(q_{12}, S\backslash\{11\}) = (q_{12}, isto, +1)$$

$$f(q_{12}, 11) = (q_{13}, 11, +1)$$

$$f(q_{13}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{13}, isto, +1)$$

$$f(q_{13}, 1) = (q_{14}, 1, +1)$$

$$f(q_{14}, S\backslash\{12\}) = (q_{14}, isto, +1)$$

$$f(q_{14}, 12) = (q_{15}, 12, +1)$$

$$f(q_{15}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{15}, isto, +1)$$

$$f(q_{15}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{15}, 2) = (q_{16}, 2, +1)$$

$$f(q_{16}, S\backslash\{13\}) = (q_{16}, isto, +1)$$

$$f(q_{16}, 13) = (q_{17}, 13, +1)$$

$$f(q_{17}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{17}, isto, +1)$$

$$f(q_{17}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{17}, 2) = (q_{100}, 2, +1)$$

$$f(q_{17}, 3) = (q_{18}, 3, +1)$$

$$f(q_{18}, S\backslash\{14\}) = (q_{18}, isto, +1)$$

$$f(q_{18}, 14) = (q_{19}, 14, +1)$$

$$f(q_{19}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{19}, isto, +1)$$

$$f(q_{19}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{19}, 2) = (q_{100}, 2, +1)$$

$$f(q_{19}, 3) = (q_{100}, 3, +1)$$

$$f(q_{19}, 4) = (q_{1000}, 4, +1)$$

$$f(q_{17}, 4) = (q_{20}, 4, +1)$$

$$f(q_{20}, S\backslash\{14\}) = (q_{20}, isto, +1)$$

$$f(q_{20}, 14) = (q_{21}, 14, +1)$$

$$f(q_{21}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{21}, isto, +1)$$

$$f(q_{21}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{21}, 2) = (q_{100}, 2, +1)$$

$$f(q_{21}, 3) = (q_{1000}, 3, +1)$$

$$f(q_{21}, 4) = (q_{100}, 4, +1)$$

$$f(q_{15}, 3) = (q_{22}, 3, +1)$$

$$f(q_{22}, S\backslash\{13\}) = (q_{22}, isto, +1)$$

$$f(q_{22}, 13) = (q_{23}, 13, +1)$$

$$f(q_{23}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{23}, isto, +1)$$

$$f(q_{23}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{23}, 2) = (q_{24}, 2, +1)$$

$$f(q_{24}, S\backslash\{14\}) = (q_{23}, isto, +1)$$

$$f(q_{24}, 14) = (q_{25}, 14, +1)$$

$$f(q_{25}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{24}, isto, +1)$$

$$f(q_{25}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{25}, 2) = (q_{100}, 2, +1)$$

$$f(q_{25}, 3) = (q_{100}, 3, +1)$$

$$f(q_{25}, 4) = (q_{1000}, 4, +1)$$

$$f(q_{23}, 3) = (q_{100}, 3, +1)$$

$$f(q_{23}, 4) = (q_{26}, 4, +1)$$

$$f(q_{26}, S\backslash\{14\}) = (q_{26}, isto, +1)$$

$$f(q_{26}, 14) = (q_{27}, 14, +1)$$

$$f(q_{27}, S\backslash\{1, 2, 3, 4\}) = (q_{27}, isto, +1)$$

$$f(q_{27}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{27}, 2) = (q_{1000}, 2, +1)$$

$$f(q_{27}, 3) = (q_{100}, 3, +1)$$

$$f(q_{27}, 4) = (q_{100}, 4, +1)$$

$$f(q_{15}, 4) = (q_{28}, 4, +1)$$

$$f(q_{28}, S\backslash\{13\}) = (q_{28}, isto, +1)$$

$$f(q_{28}, 13) = (q_{29}, 13, +1)$$

$$f(q_{29}, S\backslash\{1,2,3,4\}) = (q_{29}, isto, +1)$$

$$f(q_{29}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{29}, 2) = (q_{30}, 2, +1)$$

$$f(q_{30}, S\backslash\{14\}) = (q_{30}, isto, +1)$$

$$f(q_{30}, 14) = (q_{31}, 14, +1)$$

$$f(q_{31}, S\backslash\{1,2,3,4\}) = (q_{31}, isto, +1)$$

$$f(q_{31}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{31}, 2) = (q_{100}, 2, +1)$$

$$f(q_{31}, 3) = (q_{1000}, 3, +1)$$

$$f(q_{31}, 4) = (q_{100}, 4, +1)$$

$$f(q_{29}, 3) = (q_{32}, 3, +1)$$

$$f(q_{32}, S\backslash\{14\}) = (q_{32}, isto, +1)$$

$$f(q_{32}, 14) = (q_{33}, 14, +1)$$

$$f(q_{33}, S\backslash\{1,2,3,4\}) = (q_{33}, isto, +1)$$

$$f(q_{33}, 1) = (q_{100}, 1, +1)$$

$$f(q_{33}, 2) = (q_{1000}, 2, +1)$$

$$f(q_{33}, 3) = (q_{100}, 3, +1)$$

$$f(q_{33}, 4) = (q_{100}, 4, +1)$$

$$f(q_{29}, 4) = (q_{100}, 4, +1)$$

$$\cdots$$

Napomena: Stanje q_{1000} vodi Tjuringovu mašinu u sledeću proveru, dok za q_{100} važi:

$$f(q_{100}, S\backslash\{b\}) = (q_{100}, isto, +1)$$

$$f(q_{100}, b) = (q_2, b, -1)$$