

# Primena metode najmanjih kvadrata u obradi signala

Aleksandra Kojčinović 2018/0453

June 19, 2020

# Sadržaj

<b>1 Uvod</b>	<b>2</b>
1.1 Sistemi punog ranga i sistemi sa rang defektom	2
1.2 Regularizacija	5
1.3 Ponderisana regularizacija	5
<b>2 Primena metoda najmanjih kvadrata u obradi signala</b>	<b>6</b>
2.1 Polinomska aproksimaicija	6
2.2 Linearno predvidjanje	10
2.3 Uklanjanje šuma	12
2.4 Dekonvolucija	14
2.5 Identifikacija sistema	16

# Uvod

## 1.1 Sistemi punog ranga i sistemi sa rang defektom

Neka je dat sistem linearnih jednačina (\*)

$$y = Hx$$

Gde je  $H$  matrica sistema dimenzija  $m \times n$ ,  $y$  vektor slobodnih članova dimenzija  $m \times 1$  i  $x$  vektor nepoznatih dimenzija  $n \times 1$ .

Sistem (\*) je *sistem punog ranga* ako važi:

$$r = \text{rang}(H) = \min\{m, n\}.$$

Posmatramo dva slučaja:

1. Ukoliko je

$$r = n < m$$

sistem je *predeterminisan* (matrica  $H$  ima više vrsta nego kolona).

U ovom sučaju, sistem (\*) nema rešenja, pa ćemo  $x$  tražiti postupkom minimizacije energije greske

$$E(x) = \|y - Hx\|^2$$

Razvojem  $E(x)$  dobijamo

$$\begin{aligned} E(x) &= (y - Hx)^T(y - Hx) \\ &= y^T y - y^T Hx - (Hx)^T y + (Hx)^T Hx \\ &= y^T y - y^T Hx - x^T H^T y + x^T H^T Hx \\ &= y^T y - 2y^T Hx + x^T H^T Hx \end{aligned}$$

gde je  $x^T H^T y = y^T Hx$ .

Diferenciranjem  $E(x)$  i izjednačavanjem izvoda sa nulom dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} E(x) &= -2H^T y + 2H^T H x = 0 \\ \Rightarrow H^T H x &= H^T y\end{aligned}$$

Prepostavimo da je  $H^T H$  invertibilno

$$x = (H^T H)^{-1} H^T y$$

Rešenje dobijeno **metodom najmanjih kvadrata**:

$$\boxed{\min_x \|y - Hx\|^2 \Rightarrow x = (H^T H)^{-1} H^T y}$$

**2.** Ukoliko je

$$r = m < n$$

sistem je *nedeterminisan* (matrica  $H$  ima više kolona nego vrsta).

U ovom slučaju, sistem (\*) ima više rešenja, pa ćemo  $x$  tražiti minimizacijom norme

$$\min_x \|x\|^2$$

tako da je  $y = Hx$ .

Minimizacija se može postići pomoću Lagranžovih množitelja

$$(x, \mu) = \|x\|^2 + \mu^T(y - Hx)$$

Traženjem parcijalnih izvoda po  $x$  i  $\mu$  i izjednačavanjem sa nulom dalje dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x) &= 2x - H^T\mu = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}H^T\mu \\ \frac{\partial}{\partial \mu}(x) &= y - Hx = 0 \Rightarrow \quad y = Hx \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}HH^T\mu \end{aligned}$$

Pod pretpostavkom da je  $HH^T$  invertibilno, sledi

$$\mu = 2(HH^T)y.$$

Kombinacijom prethodno dobijenih jednačina dobijamo

$$x = H^T(HHT)^{-1}y$$

Rešeće dobijeno **metodom najmanjih kvadrata**

$$\boxed{\min_x \|x\|^2, y = Hx \Rightarrow \quad x = H^T(HHT)^{-1}y}$$

Pored sistema razmatranih u prethodna dva slučaja, moguće je da važi:

$$r = \text{rang}(A) < \min\{m, n\}$$

i tada sistem nazivamo sistemom sa *rang defektom*.

Tada su matrice  $H^T H$  i  $HH^T$  kvadratne singularne matrice i najbolje aproksimativno rešenje nije moguće odrediti primenom inverznih matrica.

## 1.2 Regularizacija

Pored minimizacije u slučaju predeterminisanih ili nedeterminisanih sistema, još jedan način pronalaženja optimalnog  $x$  je minimizacija ponderisane sume:  $c_1\|y - Hx\|^2 + c_2\|x\|^2$ . Tada nepoznata  $x$  zavisi od odnosa  $c_1/c_2$ , a ne od  $c_1$  i  $c_2$  pojedinačno.

Često se do optimalnog rešenja sistema linearnih jednačina dolazi minimizacijom funkcije

$$J(x) = \|y - Hx\|^2 + \lambda\|x\|^2$$

gde je  $\lambda > 0$ .

Diferenciranjem po  $x$  i izjednačavanjem sa nulom, dalje dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x} J(x) = 2H^T(Hx - y) + 2\lambda x = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & H^T H x + \lambda x = H^T y \\ \Rightarrow \quad & (H^T H + \lambda I)x = H^T y \\ \Rightarrow \quad & x = (H^T H + \lambda I)^{-1} H^T y. \end{aligned}$$

Konačno

$$\boxed{\min_x \|y - Hx\|^2 + \lambda\|x\|^2 \Rightarrow x = (H^T H + \lambda I)^{-1} H^T y}$$

Ovaj pristup je pogodniji, jer ne nailazi na problem ukoliko je sistem sa rang defektom, zbog toga što je  $H^T H + \lambda I$  invertibilno čak i ako  $H^T H$  nije.

## 1.3 Ponderisana regularizacija

Ukoliko je vektor nepoznatih  $x$  pomnožen matricom koeficijenata  $A$ , do optimalnog rešenja sistema može se doći minimizacijom funkcije

$$J(x) = \|y - Hx\|^2 + \lambda\|Ax\|^2$$

gde  $\lambda > 0$ . Diferenciranjem po  $x$  i izjednačavanjem sa nulom dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} J(x) &= 2H^T(Hx - y) + 2\lambda A^T Ax = 0 \\ \Rightarrow \quad & H^T H x + \lambda A^T A x = H^T y \\ \Rightarrow \quad & (H^T H + \lambda A^T A)x = H^T y \\ \Rightarrow \quad & x = (H^T H + \lambda A^T A)^{-1} H^T y. \end{aligned}$$

Konačno

$$\boxed{\min_x \|y - Hx\|^2 + \lambda\|Ax\|^2 \Rightarrow x = (H^T H + \lambda A^T A)^{-1} H^T y}$$

# Primena metoda najmanjih kvadrata u obradi signala

## 2.1 Polinomska aproksimaicija

Neka je dato  $m$  merenja oblika  $(t_i, y_i)$ , gde  $1 \leq i \leq m$ .

Cilj nam je da nadjemo polinom koji aproksimira podatke minimizacijom energije greske:

$$E = \sum_i (y_i - p(t_i))^2$$

gde je  $p(t)$  polinom stepena  $n$  ( $m > n + 1$ )

$$p(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$$

Posmatrani slučaj se rešava kao *predeterminisan* sistem jednačina,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

koji označavamo kao  $y \approx H\alpha$

Energija greške se dobija kao

$$E = \|y - H\alpha\|^2,$$

a rešenje dobijeno primenom metode najmanjih kvadrata je

$$\alpha = (H^T H)^{-1} H^T y.$$

i predstavlja vektor koeficijenata optimalne prave.

### Primer 1.

Odrediti linearnu regresiju za sledeće skupove podataka:

1.

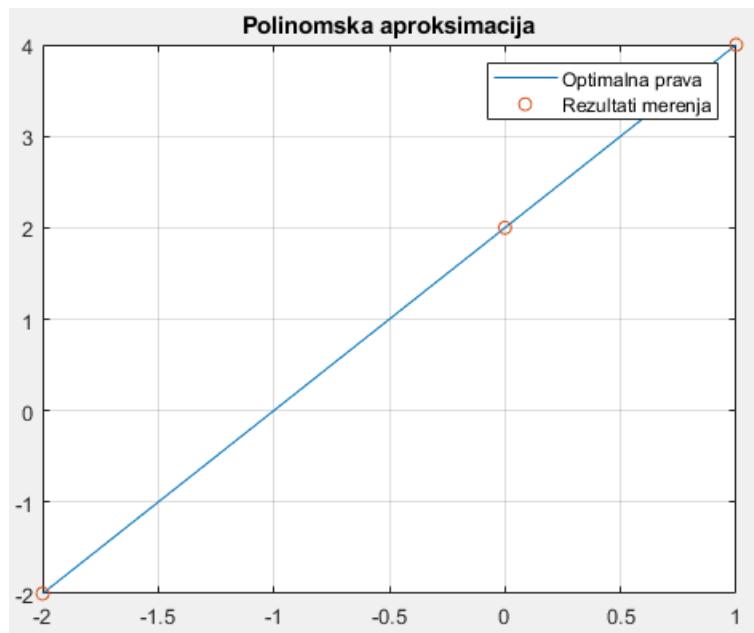
x	-2	1	0
y	-2	4	2

Rešenje:

Uzmimo  $n = 1$  za stepen polinoma  $p(x)$ .

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$p(x) = 2x + 2$$



Slika 2.1. n=1

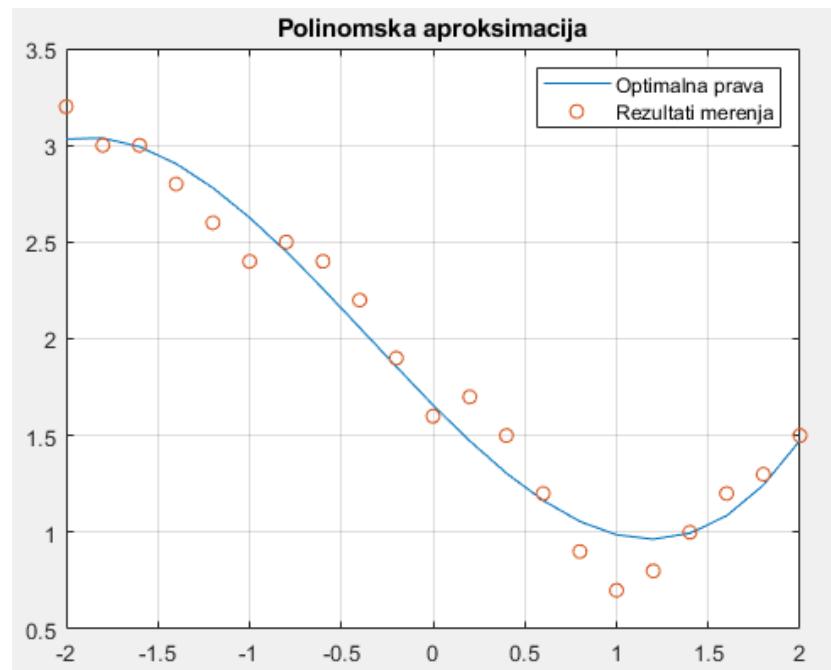
2. Promenljiva  $x$  uzima redom vrednosti iz intervala  $[-2, 2]$  sa korakom 0,2, a  $y$  uzima vrednosti:  $y = \{3.2, 3, 3, 2.8, 2.6, 2.4, 2.5, 2.4, 2.2, 1.9, 1.6, 1.7, 1.5, 1.2, 0.9, 0.7, 0.8, 1, 1.2, 1.3, 1.5\}$ .

Rešenje:

Uzmimo  $n = 3$  za stepen polinoma  $p(x)$ .

Primenom postupka kao u prvom primeru dobijamo:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1.6576 \\ -0.9633 \\ 0.1490 \\ 0.1435 \end{bmatrix} \Rightarrow p(x) = 1.6576 - 0.9633x + 0.1490x^2 + 0.1435x^3$$



Slika 2.2.  $n=3$

## Primer 2.

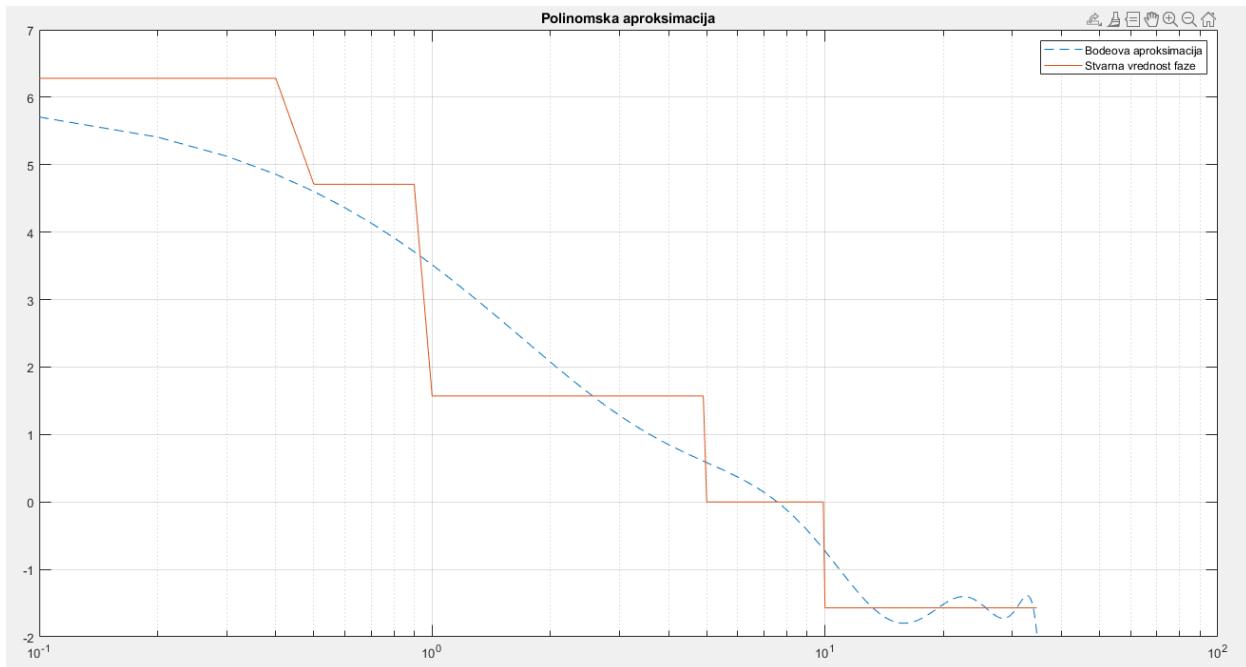
Prikazati Bodeove karakteristike sistema sa frekvencijskom karakteristikom

$$H(j\omega) = \frac{250(-1 + j\omega)^2}{(0.5 + j\omega)(5 + j\omega)(10 + j\omega)}$$

Bodeova aproksimacija fazne karakteristike:

$$\phi = \arg\{H(j\omega)\} = \begin{cases} 2\pi, & \omega < 0.5 \\ 3\pi/2, & 0.5 < \omega < 1 \\ \pi/2, & 1 < \omega < 5 \\ 0, & 5 < \omega < 10 \\ -\pi/2, & \omega > 10 \end{cases}$$

Za  $n = 7$  dobijamo:  $p(\omega) = -0.0003\omega^5 + 0.0078\omega^4 - 0.1084\omega^3 + 0.8058\omega^2 - 3.2079\omega + 6.0188$



Slika 2.3

## 2.2 Linearno predvidjanje

Ukoliko poznajemo vrednosti zavisne promenljive  $y(i)$  za neko  $i \leq m - 1$ , gde je  $m$  broj merenja i želimo da izvršimo linearnu predikciju  $j$ -tog reda, tada je predeterminisan sistem jednačina dat kao

$$\begin{bmatrix} y(j) \\ y(j+1) \\ \vdots \\ y(m-1) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} y(j-1) & y(j-2) & \dots & y(0) \\ y(j) & y(j-1) & \dots & y(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-2) & y(N-3) & \dots & y(N-j+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_j \end{bmatrix}$$

koji označavamo kao  $y^* = H\alpha$ , gde je  $H$  matrica dimenzija  $(m-j) \times j$ .

Rešenje se dobija primenom metoda najmanjih kvadrata, kao

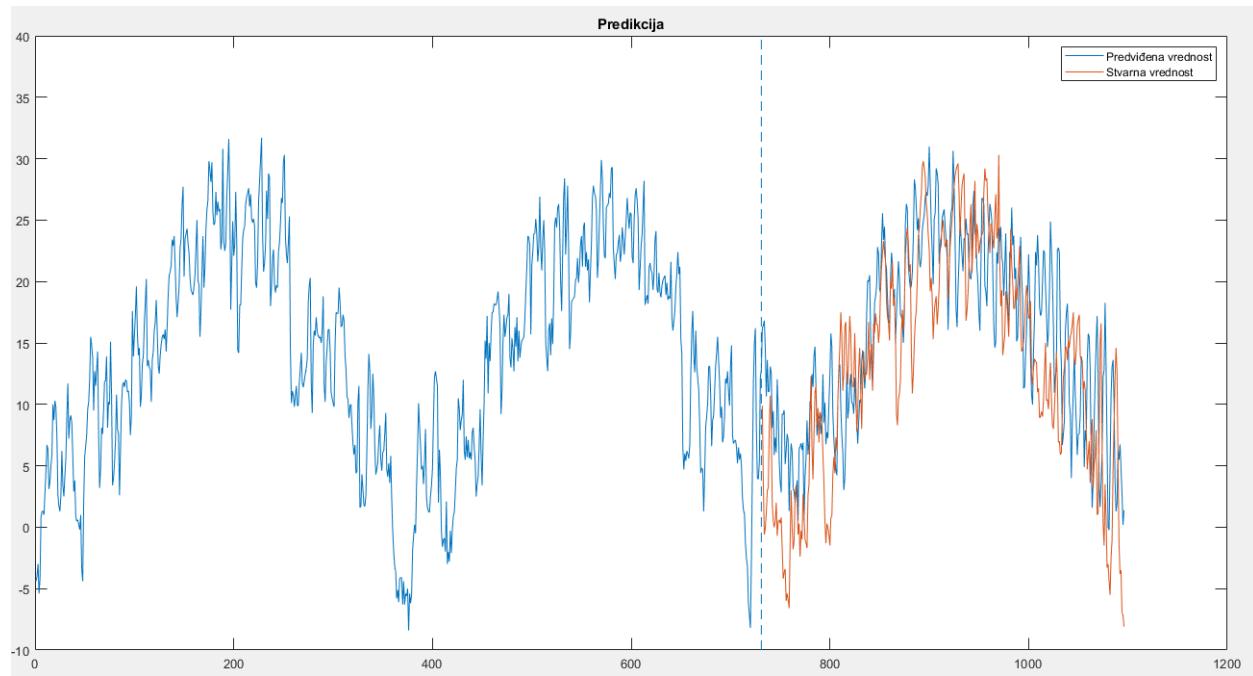
$$\alpha = (H^T H)^{-1} H^T y^*.$$

Kada poznajemo vektor  $\alpha$ , možemo proceniti vrednost  $y(n)$  i za  $n > m$  koristeći rekurzivnu diferencnu jednačinu

$$y(n) = \alpha_1 y(m-1) + \alpha_2 y(m-2) + \dots + \alpha_j y(N-j).$$

## Primer:

Prikaz predikcije vremenske prognoze za 2010. godinu u odnosu na podatke iz prethodne dve godine.



Slika 2.4. Za red linearne predikcije uzeto je  $j=280$ .

## 2.3 Uklanjanje šuma

Ukoliko želimo da uklonimo šum iz određenog signala, možemo se poslužiti ponderisanom regularizacijom najmanjih kvadrata. Cilj je da dobijemo signal sličan originalnom, samo gladji (sa što manje šuma). Glatkost signala može se izmeriti pomoću energije njegovog izvoda, tačnije pomoću izvoda drugog reda.

Definišimo matricu D kao

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$Dx$  predstavlja diskretnu formu drugog izvoda signala  $x(n)$ .

Ako je  $y(n)$  signal koji poseduje šum, tada glatki signal  $x(n)$ , koji aproksimira  $y(n)$ , može da se posmatra kao rešenje problema

$$\min_x \|y - x\|^2 + \lambda \|Dx\|^2$$

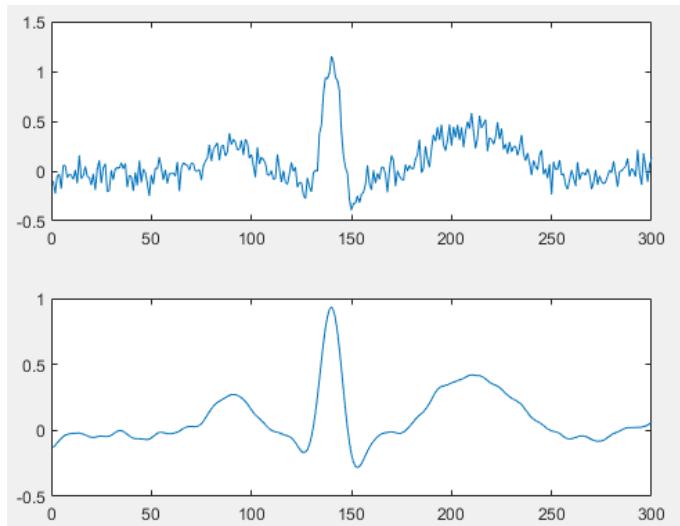
gde je  $\lambda > 0$  parametar koji treba odrediti.

Minimizacija  $\|y - x\|$  navodi x da bude što sličniji signalu y.

Minimizacija  $\|Dx\|$  čini da x bude gladak.

Jednačina minimizacije signala x je data kao

$$x = (I + \lambda D^T D)^{-1} y$$



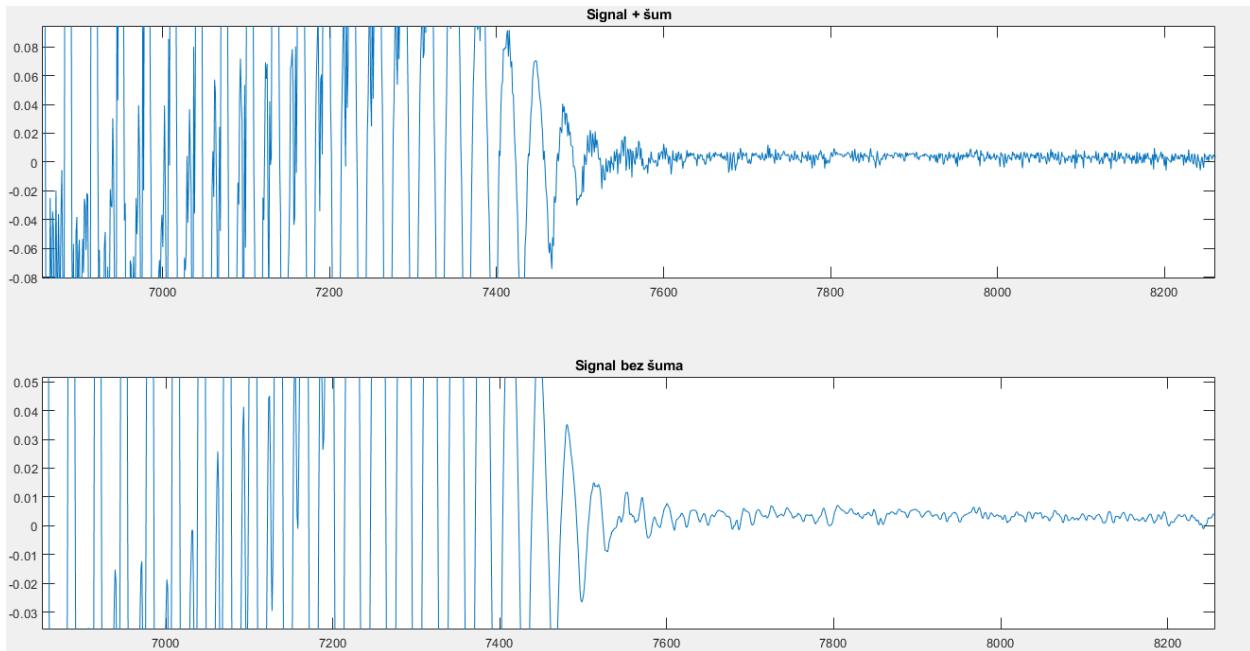
Slika 2.5. Prikaz signala koji sadrži šum i signala bez šuma nakon postupka minimizacije

### Primer:

Za ulazni signal uzete su dve sekunde audio snimka frekvencije 8000Hz. Primenom metode najmanjih kvadrata signal je "zagladjen".

Ulagni audio signal  $y(n)$  se posmatra kao niz dužine  $n = 16000$ , pa shodno tome konstrušemo matricu  $D$  dimenzija  $(n - 2) * n$  koja simulira diferencijal drugog reda. Za parametar  $\lambda$  uzeta je vrednost 2. Krajnji signal se dobija kao  $x = (I + \lambda D^T D)^{-1}y$ . Oblik oba signala prikazan je na slici.

Y



Slika 2.6

Jos jedan primer primene je deblurovanje slike. Naime, zamućenje dobijeno konverzijom slike se može posmatrati kao šum, te se njegovim uklanjanjem slika izoštrava.

## 2.4 Dekonvolucija

Dekonvolucija se odnosi na problem pronalaženja ulaznog signala LTI sistema ukoliko je izlazni signal poznat.

Pretpostavimo da je impulsni odziv sistema  $h(t)$  poznat i da je izlazni signal  $y(t)$  gladak.

Izlazni signal  $y(t)$  se dobija konvolucijom signala  $x(t)$  i impulsnog odziva.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

$$y(t) = h(0)x(n) + h(1)x(n - 1) + \dots + h(N)x(n - N)$$

Ova jednačina se može napisati u obliku  $y = Hx$ , gde je  $H$  matrica oblika

$$H = \begin{bmatrix} h(0) & & & \\ h(1) & h(0) & & \\ h(2) & h(1) & h(0) & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Često je matrica  $H$  singularna, te problemu pristupamo postupkom regularizacije

$$\min_x \|y - Hx\|^2 + \lambda \|x\|^2$$

gde je  $\lambda > 0$  parametar koji treba odrediti. Čak i mala vrednost parametra  $\lambda$  dodata na dijagonalu matrice  $H^T H$  je dovoljna da učini matricu invertibilnom.

Minimizacija signala  $x$

$$x = (H^T H + \lambda I)^{-1} H^T y$$

U praksi, najčešće se srećemo sa signalima koji poseduju šum, te je  $y$  dato kao  $y = Hx + w$ , gde  $w$  predstavlja šum. Sum se najčešće modeluje kao aditivni beli Gausov šum, zbog čega će mala vrednost parametra  $\lambda$  dovesti do potencijalnog ulaznog signala koji takođe poseduje šum, a prevelika vrednost dovesti do distorzije ulaznog signala.

Minimizacijom energije izvoda signala  $x$ , postiže se njegova glatkoća, pa imamo

$$\min_x \|y - Hx\|^2 + \lambda \|Dx\|^2$$

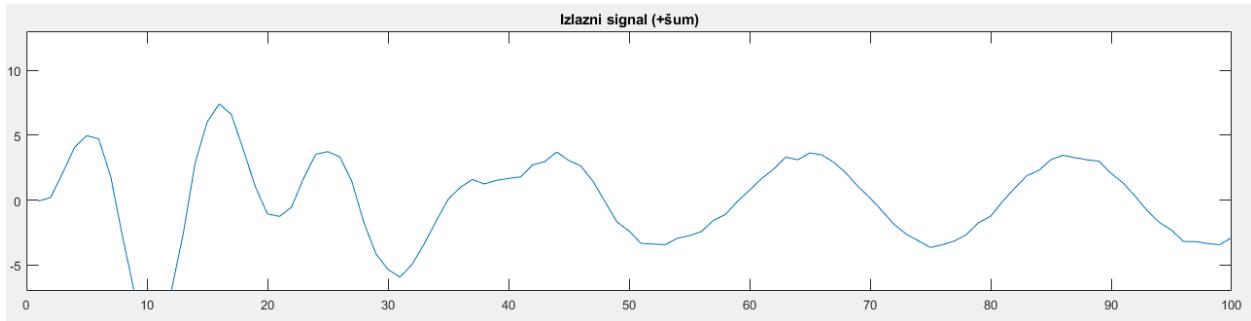
gde je  $D$  matrica izvoda drugog reda.

Dakle, minimizacija signala  $x$  je data sa

$$x = (H^T H + \lambda D^T D)^{-1} H^T y$$

## Primer

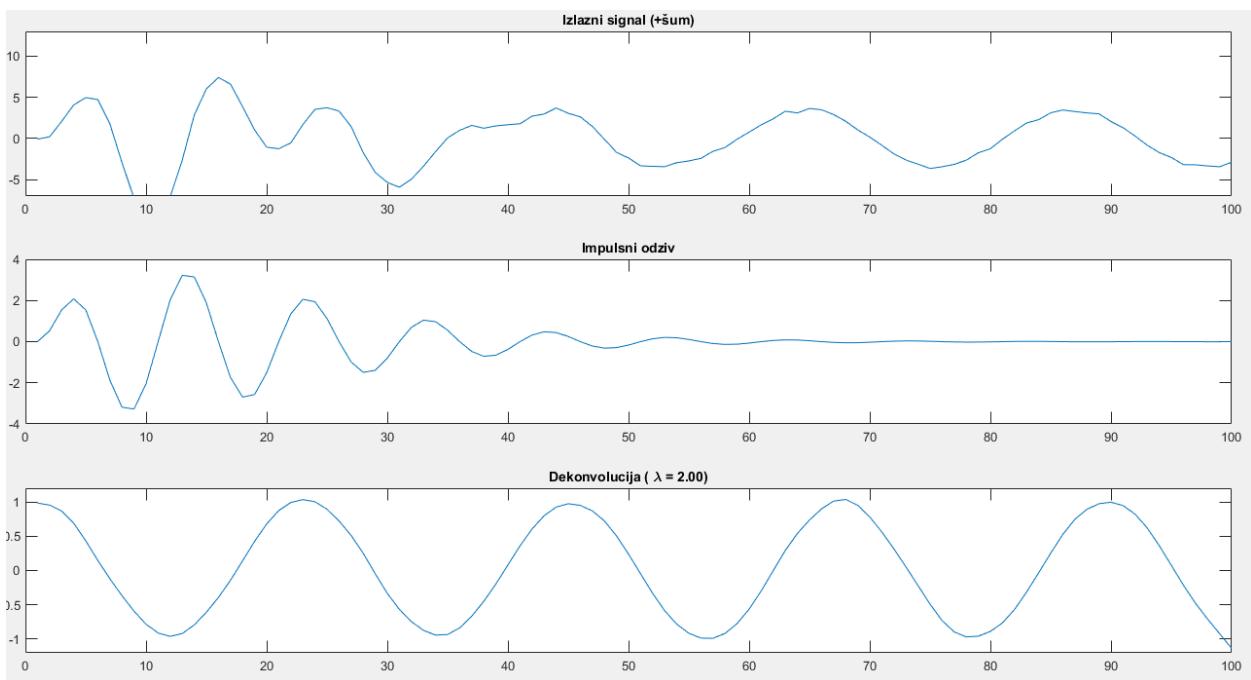
LTI sistem opisan funkcijom  $h(t) = t(0.9)^t \sin(0.2\pi t)$  na svom izlazu daje signal  $y(t)$ :



Slika 2.7. Izlazni signal datog LTI sistema  $y(t)$

Odrediti ulazni signal ovog sistema.

Rešenje:



Slika 2.8. Postupak dekonvolucije za parametar  $\lambda = 2$

## 2.5 Identifikacija sistema

Najjednostavniji oblik problema identifikacije sistema odnosi se na LTI sistem, čiji su ulazni i izlazni signali poznati. Takodje, pretpostavljamo da izlazni signal sadrži šum i da je impulsni odziv sistema relativno kratak.

Izlazni signal  $y(n)$  može se izraziti kao

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + h(2)x(n-2) + w(n)$$

gde je  $x(n)$  ulazni signal,  $w(n)$  šum, a impulsni odziv  $h(n)$  je dužine 3.

Možemo to zapisati u matričnoj formi

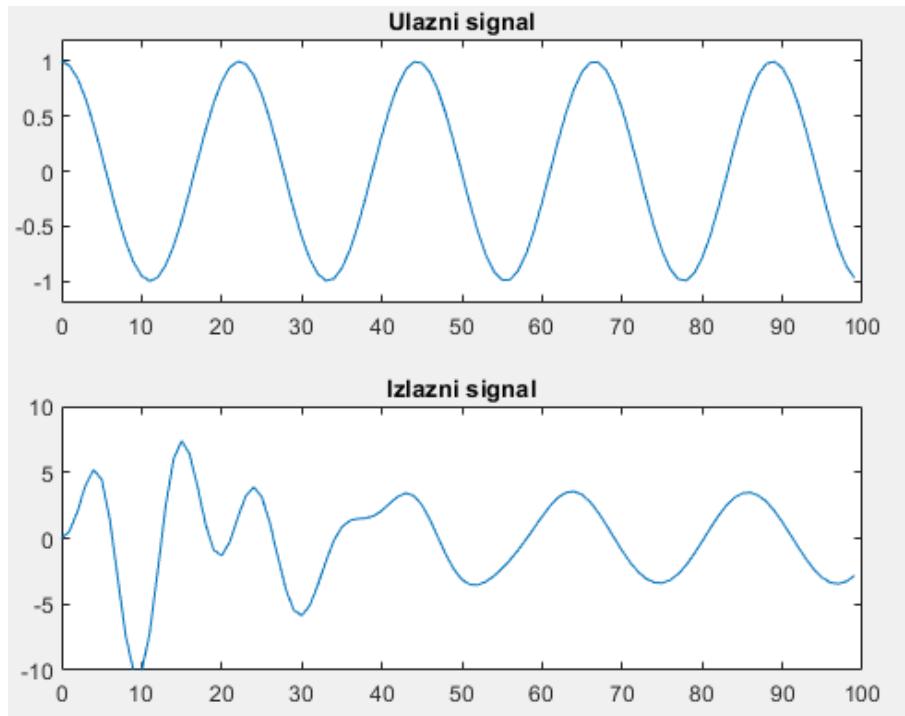
$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x(0) & & & \\ x(1) & x(0) & & \\ x(2) & x(1) & x(0) & \\ x(3) & x(2) & x(1) & \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix}$$

i označiti kao  $y \approx Xh$ . Ukoliko je izlazni signal znatno dužeg trajanja od impulsnog odziva, matrica  $X$  ima više vrsta nego kolona, pa je u pitanju predeterminisan sistem jednačina. U tom slučaju  $h$  možemo naći iz

$$h = (X^T X)^{-1} X^T y$$

## Primer

Odrediti prenosnu funkciju LTI sistema čiji su ulazni i izlazni signal oblika:



Slika 2.9. Oblici ulaznog i izlaznog signala posmatranog LTI sistema

Rešenje:



Slika 2.10

## *Literatura*

1. Materijali sa predavanja
2. Materijali sa vežbi iz predmeta signali i sistemi
3. Materijali sa predmeta Praktikum iz softverskih alata
4. [http://www.meteologos.rs/wp-content/uploads/2017/06/BEOGRAD-VRACAR\\_-dnevni-meteo-pod-1936-2010.pdf](http://www.meteologos.rs/wp-content/uploads/2017/06/BEOGRAD-VRACAR_-dnevni-meteo-pod-1936-2010.pdf)
5. <https://cnx.org/contents/XRPKcVgh@1/Least-Squares-with-Examples-in-Signal-Processing-uid22>