Hilbertovi problemi

Milica Bokčić 0035/2018
Lazar Sudžum 0151/2018

28. april 2020

Sadržaj

Uvod

Mi moramo znati. Mi ćemo znati. - David Hilbert

"Kome od nas ne bi bilo drago da podigne veo iza koga se skriva budućnost; da baci pogled na sledeći napredak naše nauke i na tajne njenog razvoja tokom budućih vekova? Kojim će konkretnim ciljevima težiti vodeća matematička misao narednih generacija? Kakve će nove metode i nove činjenice iz širokog i bogatog polja matematičke misli otkriti novi vek?"

Ovim rečima je davne 1900.godine, čuveni matematičar David Hilbert, počeo svoje izlaganje na Internacionalnom Kongresu Matematičara u Parizu. Verovatno ni ne sluteći koliko će njegove reči proročanski zvučati stotinu godinama nakon toga događaja, on je na ovome kongresu iznio 23 problema koji će postati jedan od osnova za nova matematička istraživanja u narednim vekovima.

David Hilbert je bio poznati nemački matematičar i fizičar. Rođen je u jednom malom mestu pokraj Kenigsberga, današnjeg Kaljinjingrada 1862. godine. Nakon završene gimnazije u Vilhemu, upisuje fakultet u Kenigsbergu na kojem upoznaje svog najboljeg druga i dugogodišnjeg prijatelja Hermana Minkowskog. Upravo je Minkowski zaslužan žašto danas imamo ova 23 opšte poznata problema. Naime pred sami samit Hilbert se dvoumio da li da govori u odbranu čiste matematike ili ipak da priča o pravcu razvića kojim bi matematika trebala da krene u 20. veku. Minkowski ga je nagovorio da bi ova druga tema možda bila bolja jer kako je rekao Ša takvom temom, može se desiti da ljudi decenijama govore o tom predavanju."Na našu sreću bio je u pravu. I to daleko više u pravu, nego što je i sam u tom trenutku mogao da pretpostavi.Matematički problemi koje je Hilbert tada predstavio postali su viralni, čak i za ljude koji se ne bave matematikom i u mnogome su doprinijeli da njegovo ime postane poznato širom zemaljske kugle. Nakon završenog doktorata 1886. godine Hilbert postaje profesor na fakultetu u Kenigsbergu i na toj poziciji se zadržava sve do 1895. godine; kada prelazi na fakultet u Getingenu gde će raditi sve do penzije 1930.godine. Umro je 1943. godine u Getingemu, gdje se nalazi i njegov grob sa čuvenim natpisom sa početka ovoga teksta.

Doprinos Davida Hilberta svetskog nauci je nemerljiv. Iako ga danas širi društveni krugovi najčešće prepoznaju po njegovim čuvenim problemima, to je ipak samo dio slagalice u ogromnom opusu koji je ovaj čovek ostavio iza sebe. Bavio se kako čistom matematikom tako i matematičkom filozofijom, a dao je i značajan doprinos razvoju teorijske fizike. Teško je definisati kojim se oblastima matematike Hilbert bavio, u suštini on je dao veliki doprinos mnogim matematičkim disiplinama.Još 1888. godine poopštio je Žordanovu teoremu.Od 1892. do 1898. godine Hilbert se bavio teorijom algebarskih brojeva. Njegova otkrića su umnogome doprinela daljem razvoju ove matematičke discipline. Nakon toga počinje da radi na osnovama geometrije i iz te oblasti 1898. izdaje svoje možda i najznačajnije delo "*Osnove geometrije*. Ovaj rad je posebno bitan, ako se uzme u obzir da su se ljudi do tada geometrijom bavili prilično "proizvoljno", bez nekih čvrsto određenih pravila i principa. Hilbert je prvi koji je aksiomatizovao geometriju i postavio pravila i principe za dalji razvoj ove matematičke discipline. Ovo je bio ključ za početak razvoja moderne geometrije kakvu je danas poznajemo. Uveo je pojam Hilbertovog prostora, poznata je Hilbertova osnovna teorema, Hilbertov program ...

Nakon smrti svoga prijatelja Minkowskog 1912. godine, koji je bio fizičar, centar njegovog interesovanja postaje teorijska fizika. Tu se istakao naročito svojom saradnjom sa Albertom Ajnštajnom u vezi teorije relativiteta.Skoro istovremeno su obojica došli do krajnjeg oblika jednačina polja. A pored toga predmet njegovog interesovanja bile su osnove teorije radijacije, molekularne teorije materije, kao i kvantna mehanika na koju je imao veliki uticaj. Kao nekome ko je bio matematičar, Hilbertu je smetalo neadekvatno korišćenje matematike u fizici, pa je zbog toga radio na uvođenju strogih matematičkih aksioma u fizici. Mada, o tome više u oblasti koja se tiče šestog Hilbertovog problema.

Kao filozof Hilbert je postao najpoznatiji po svom tvrđenju da sva matematika proizilazi iz ispravno odabranog konačnog skupa aksioma i da takav skup aksioma dokazivo konzistentan. Ovakav pristup se u literaturi naziva formalizam i on je jedan od njegovih začetnika.
Značaj Hilbertovih problema je i dan danas jako veliki, neki od njih su rešeni, neki nerešeni, a neki samo delimično rešeni, ostavljajući još mnogo prostora za napredak. Ipak u vremenu kada su objavljeni Hilbertovi problemi su bili, nešto potpuno revolucionarno. Oni su usmerili razvoj cele matematičke nauke u idućem veku. Neki od njih su rešeni potpuno, neki samo delimično, a neki su do dan danas ostali nerešeni. U matematici je opšteprihvaćen stav da je najznačajniji nerešeni matematički problem današnjice Rimanova hipoteza.Čak je i sam Hilbert kada su ga pitali šta bi radio da se probudi iz sna nakon 100 godina odgovorio da bi prvo pitao da li je rešena Rimanova hipoteza. Ona je srž 8. Hilbertovog problema i već desetljećima je centar pažnje najboljih svetskih matematičara. Ovo dovoljno govori o tome koliko su ovi problemi bitni i koliki je njihov značaj u naučnim krugovima. Važno bi bilo napomenuti da je Hilbert u svojoj originalnoj zamisli imao 24 problema, ali je odustao od objavljivanja posljednjeg problema. Neobjavljeni problem je trebao da se bavi kriterijumom jednostavnosti pojedinih matematičkih dokaza. Njegov cilj je bio da utvrdi univerzalni kriterijum po kojem bi se matematički dokazi mogli rangirati prema jednostavnosti. Na žalost o ovome problemu se jako malo znalo sve do 2000. godine kada ga je otkrio njemački istoričar Rudiger Thiele, u Hilbertovim originalnim beleškama. Ni danas ne znamo

zašto je Hilbert odustao od objave ovoga problema. Treba napomenuti da je na kongresu u Parizu Hilbert objavio samo 10 problema, dok su ostalih 13 problema objavljeni nešto kasnije.

Iako je ovo mnogo široka i ozbiljna tema, za čiju bi detaljnu obradu bilo potrebno mnogo vremena, znanja i prostora, mi ćemo se potruditi da najbolji i najjednostavniji način sistematizujemo osnovna znanja o Hilbertovim problemima, koja su do sada skupljena. O ovoj temi bi se mogle pisati cele knjige i stoga verovatno da ćemo u nekom delu ostati nedorečeni. Ali cilj ovoga rada nije ekspertska analiza već upoznavanje sa temom i obrada problema u skladu sa našim mogućnostima i potrebama. Rad će biti koncipiran tako da svaki problem dobije svoju zasebnu celinu, koja će biti izdeljena na najčešće 3 manje oblasti. Prva oblast će služiti da nas uvede u osnove problema, njegov nastanak i suštinu. U drugoj oblasti ćemo se potruditi da sažeto iznesemo dosadašnja znanja i uspehe u rešavanju datog problema; dok će treća oblast biti svojevrsni rezime, koji će služiti da objedinimo ono što je po našem mišljenju najbitnije u vezi tog problema.

Bitno je reći da su u ovom uvodnom delu, mnoge bitne stvari izostavljene iz Hilbertove biografije i rada; zbog toga što to svakako nije glavna tema o kojoj bi trebali da razgovaramo. Ipak, za one koje interesuje da saznaju nešto više i opširnije o životu i radu Davida Hilberta, u referencama ćemo navesti neke interesantne članke i knjige iz kojih smo mi crpeli informacije.

1 Problem 1 - Kantorov problem kardinalnog broja kontinuma

1.1 Opšti opis problema

Beskonačnost je nešto što je još od antičkih vremena fasciniralo ljudsku maštu i saznanje. To je neiscrpna tema kojom su se bavili mnogi poznati filozofi i naučnici. Ipak niko tako dobro i niko tako precizno kao njemački matematičar Džordž Kantor. Prije njega beskonačnost je bila najčešće predmet filozofskih razmatranja, a matematičari su većinom voleli da se bave konačnim skupovima. Kantor je prvi precizno definisao beskonačnost, kao matematički pojam i svoju teoriju skupova ugradio u temelje moderne matematike. O značaju njegovog rada najbolje govori Hilbertova rečenica: "Niko nas ne može prognati iz raja koji je Kantor stvorio."Elem upravo ta beskonačnost zauzima centralni dio 1. Hilbertovog problema.

Najjednostavnije rečeno, hipoteza kontinuma govori o mogućim veličinama beskonačnih skupova. Treba prvo definisati šta znači da dva skupa imaju isti kardinalni broj. Kažemo da je kardinalni broj dva skupa na primjer A i B jednak u koliko postoji bijekcija, za koju važi $A \iff B$. Ovo znači da su dva skupa jednake kardinalnosti u koliko za svaki element iz prvog skupa postoji jedan i samo jedan element iz drugog skupa i obrnuto. Na primjer skup {kamen, papir, makaze} ima istu kardinalnost kao i skup {nož, kašika viljuška}. Sve ovo jeste prilično jednostavno u koliko pričamo o konačnim skupovima, čije elemente možemo lako sagledati i čak i intuitivno zaključiti šta je u pitanju. Stvari se značajno komplikuju kada uzmemo da ispitujemo beskonačne skupove. Upravo ovom problematikom se bavio Džordž Kantor. Tu bi smo intuitivnim razmišljanjem došli do nekih netačnih zaključaka. Na primjer većina ljudi koji slabije poznaju matematiku bi rekla da postoji više racionalnih od prirodnih brojeva. Kantor je dokaza da to nije slučaj i svojim dijagonalnim postupkom [1] je utvrdio da je kardinalni broj skupa prirodnih brojeva, jednak kardinalnom broju, skupa racionalnih brojeva. Istim ovim postupkom Kantor je dokazao da skup realnih brojeva i skup celih brojeva nemaju isti kardinalni broj. Ovim je Kantor dokazao, ono što se u popularnoj literaturi naziva "tipovi beskonačnosti". Pokazao je da iako se u oba slučaja radi o beskonačnim skupovima, postoji velika razlika jer su skupovi racionalnih i prirodnih brojeva prebrojivi skupovi dok je skup realnih brojeva neprebrojiva beskonačnost. U odnosu na to saznanje Kantor je shvatio da postoje bar dva tipa beskonačnosti; prvi je nazvao alef nula, a drugi kontinum.

Iz svega ovoga izvodi se bitan zaključak da osim prirodnih brojeva,

[1] Više o dijagonalnom postupku, možete pronaći u video materijalu, čiji će link biti ostavljen u referencama, na kraju ovoga rada

koji su kardinalni brojevi konačnih skupova, postoji beskonačno mnogo različitih beskonačnih kardinalnih brojeva. Koristeći aksiomu izbora dobijamo jednu reprezentaciju svih mogućih beskonačnih kardinalnih brojeva:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 ... \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}$$

Gde $\aleph_0$ predstavlja kardinalni broj prebrojivog skupa, $\aleph_1$ prvi kardinal veći od $\aleph_0$ (prvi neprebrojivi kardinal) i tako redom. Iz ovoga se postavlja logično pitanje; kome od ovih beskonačnih kardinala je jednak kardinalni broj kontinuma. Odnosno kome alefu je jednako $2^{\aleph_0}$.[2] Kantorova hipoteza kontinuma nam kaže da ne postoji skup čija je veličina tačno između veličine prebrojivog skupa brojeva(na primer celih brojeva) i neprebrojivog skupa(na primer realnih brojeva). Matematički zapisano to bi izgledalo ovako: ako uzmemo da je kardinalnost skupa celih brojeva $|Z| = \aleph_0$, a kardinalnost realnih brojeva $|R| = 2^{\aleph_0}$ hipoteza kontinuma tada govori sledeće:

$$\nexists \mathbf{A:}\ \aleph_0 < |A| > 2^{\aleph_0}$$

Ovo je ekvivalentno sa:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Generalizovana hipoteza kontinuma govori da ovo vazi, u koliko za indekse uzmemo bilo koji prirodni broj α.

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

1.2 Napredak i stavovi o rešenosti problema

Prvi koji se bavio dokazivanjem ove hipoteze bio je sami Džordž Kantor. On je bio duboko ubeđen da je hipoteza tačna i proveo je dugo vremena pokušavajući da je dokaže. Na žalost bez uspeha. Nakon njega

[2]Za razumevanje ovoga treba napomenuti, mada bi se podrazumevalo da svi koje ova tema interesuje to znaju; da proizvoljan skup od n elemenata ima 2^n svojih podskupova i da je broj podskupova uvek veći od broja elemenata datog skupa.

mnogi matematičari su se bavili ovom temom, ali bez nekog prevelikog napretka. Sam David Hilbert je smatrao da je hipoteza tačna i mnogo truda je uložio da je dokaže to tvrđenje. Čak je na jednom kongresu 1925. godine tvrdio da ima skicu dokaza, koja međutim nikada nije realizovana. Ovakav Hilbertov stav proiziliazio je iz njegovog tvrđenja da je svaki problem rešiv. To je bila njegova velika ideja o teoriji dokaza, koja nažalost nije imala velikog uspeha, ubrzo nakon Gedelovog dokaza o nepotpunosti formalne aritmetike.

Prvi konkretan rezultat bio je Konigov rezultat iz 1904. godine, kojim je dokazao da kontinum ne može biti granična vrednost prebrojivog niza manjih kardinalnih brojeva. Suštinski to znači da kardinalni broj kontinuma ne moze biti $\aleph_\omega$. U rešavanju ovoga problema dosta je obećavala takozvana deskriptivna teorija skupova. Lako se dokazivalo da ova hipoteza važi za konačne skupove. Dokaz je bio evidentan za još neke grupe skupova koji su bili "lepo definisani". Takav gradacijski napredak ulivao je nadu da su matematičari na pravom putu. Ipak broj analitičkih skupova je veoma mali u odnosu na ukupan broj podskupova kontinuma. Već kod komplementa ovih analitičkih skupova stvar je stala i pored velikih napora raznih matematičara do dokaza se nije došlo. Kasnije će se ispostaviti da je ovo bio krajnji domet teorije skupova. U međuvremenu do 30-tih godina 20. veka matematika se značajno razvijala, pa sa njom i pogledi na hipotezu kontinuma. U koliko ovaj problem sagledavamo sa aspekta intuitivne prirode, koja nam govori da beskonačni skupovi objektivno postoje; tada hipoteza kontinuma ima samo dva moguća rešenja, ili je tačna ili je netačna. Odnosno ili je kardinalni broj kontinuma $\aleph_1$ ili nije. Na ovaj način bi mnogi matematičari i sagledavaju nauku, ali ovaj pristup je još davno naišao na značajne nedostatke.Brouwer je razvio različit način mišljenja o ovome problemu koji se naziva intuicionizam i on poprilično obesmišljava uopšte hipotezu kontinuma. Prema tom shvatanju svi matematički objekti su samo kreacije unutar ljudskog uma, pa samim tim koncept alefa većih od $\aleph_1$ gubi bilo kakav smisao. Prema Hilbertovom formalističkom shvatanju, beskonačni skupovi bi trebali biti idealni matematički objekti i samim tim hipoteza kontinuma gudi svoje prvobitno značenje. Ona se u ovom slučaju svodi na pitanje Đa li je hipoteza kontinuma izvodljiva u okviru teorije skupova?"Hilbert je u ovom slučaju pokazao određene nedoslednosti svojem stanovištu i hipotezu kontinuma je posmatrao više kao realan nego kao idealan iskaz. Čak je i na gore pomenutom kongresu 1925. godine, na neki način obrazložio ovakvo svoje viđenje stvari rekavši da je za njega ovaj problem, u stvari problem prebrojavanja tačaka nekoga intervala. Samim tim pojam geometrijskog kontinuma se može shvatiti kao sasvim nov i realan problem, za razliku od pojma beskonačnog skupa, koji po njegovim shvatanjima mora biti idealan.

U 20-tim i 30-tim godinama 20. veka, došlo je do razvoja još jednog načina razmišljanja, vrlo bitnog kako za sami problem, tako i za dileme o njegovom smislu. Razvijene su dve teorije skupova Zermelo-Frankelova i Godel-Bernajsova. Aksiome ZF-a i GB-a su sasvim precizne i dopuštaju potpunu formalizaciju. Tako je problem kontinumaa, postalo u stvari pitanje da li se formula kojom je hipoteza zapisana, može izvesti u okviru ZF-a i GB-a. To je u suštini samo jedan problem kombinatorike. Za ovaj period možemo reći da je počeo da se pojavljuje konkretan odgovor na Hilbertov prvi problem. 1938.[3] godine K. Godel je dokazao da ako su aksiome GB teorije tačne, tada se iz te teorije ne može izvesti negacija uopštene hipoteze kontinuma. Pošto su ZF i GB ekvivalente, isto automatski važi i za ZF. Pol Koen je dosta kasnije 1963. godine pokazao da uzimajući iste ove aksiome, hipoteza kontinuma ne može biti ni dokazana. Stoga dolazimo do zaključka da je hipoteza kontinuma nezavisna od ove dve teorije; pri tome uzimajući da ove teorije nemaju kontradikcija i ovo je najprihvaćenije stanovište među matematičarima. Dokaz za generalizovanu hipotezu kontinuma, koja tvrdi da ako kardinalnost beskonačnog skupa leži između kardinalnosti beskonačnog skupa S i kardinalnosti skupa partitivnog skupa od S; tada taj skup ima kardinalnost ili skupa S ili partitivnog skupa skupa od S, je izveo nešto kasnije poljski matematičar Vaclav Sjerpinjski. Do danas među matematičarima nije došlo do konsenzusa da li je ovim rešen problem Kantorove hipoteze kontinuma i u zavisnosni od stila razmišljanja vladaju popriličnо oprečna mišljenja o ovoj temi.

1.3 Rezime

U ovome delu ćemo se potruditi da iznesemo neke najbitnije zaključke koje bi bilo lepo zapamtiti.

Tema: Kantorova hipoteza kontinuma tvrdi da ne postoji skup čija je veličina strogo između veličine skupa prebrojivih i neprebrojivih brojeva(na primer prirodni i realni). U užem smislu problem se bavi kardinalnim brojevima beskonačnih skupova i njihovim odnosima.

Status rešenosti: Ovo je jedan od Hilbertovih problema za koje matematičari nemaju jedinstven stav o njegovoj rešenosti. Obično su oni matematičari koji vole beskonačne i velike skupove bili protiv hipoteze kontinuma, dok su oni koji su se zalagali za uređen i kontrolisan univerzum skupova bili za hipotezu kontinuma. Nakon svega nama ostaju dva pitanja. Prvo je da li je problem rešen? Drugi je da li je ovo uopšte matematički problem? Kao što smo rekli u zavisnosti od našeg načina razmišljanja, tako se menja i naše gledište na rešenost ovoga problema. U koliko problem posmatramo u okvirima ZF (ili GB), onda je odgovor svakako potvrdan. Problem je u tom slučaju rešen u potpunosti.

[3] Pronašao sam u različitoj literaturi različite godine. Negde piše 1938. negde 1940. godine

Šta više rešen je i problem generalizovane hipoteze kontinuma i tu je priča dovršena. Ipak postoje matematičari koji su smatrali da je odgovor na prvo pitanje-ne. Razlog je jasan, u koliko je nemoguće dokazati ili opovrgnuti dati problem u okvirima trenutno prihvaćene teorije (ZF u našem slučaju), to samo znači da nam prihvaćena teorija nije dobra. Odnosno problem neodlučnosti hipoteze kontinuma je u stvari problem toga što su nam aksiome koje koristimo preslabe. U kom smislu preslabe, ne možemo sa sigurnošću tvrditi ali samo činjenica da neke tako bitne stvari ostaju neodlučne ide jako ovakvoj tezi u prilog. U prošlosti je bilo mnogo pokušaja dodavanja i osmišljavanja novih aksioma, koji bi mogli biti ključni za definitivno rešavanje ovoga problema, na žalost prilično bezuspešno i bez dogovora koji bi svi matematički autoriteti prihvatili. Na drugo pitanje je još teže dati odgovor jer koliko god da je ovo tema koja se bavi skupovima, koji su svakako matematički objekat; jednako se bavi i prilično apstraktnim i intuitivno nejasnim stvarima odnosno beskonačnostima. U novije vreme čovek koji je najviše zagovarao tezu da ovo nije matematički problem je američki filozof i matematičar Solomon Faferman. Moje mišljenje je da je filozofija u temelju i srži same matematike; pa samim tim ovaj problem shvatam kao nešto što stoji u temelju matematičkog saznanja pa samim tim mora biti na određeni način vezano za filozofiju.

Značaj problema: Kao i svi ostali Hilbertovi problemi i Kantorova hipoteza kontinuma je imala enorman uticaj na razvoj matematičke misli u 20.veku. Kao što je u uvodu naglašeno, Hilbertu nije bilo bitno da samo ovi problemi budu rešeni; primarni njegov cilj, bilo je da usmeri razvoj matematike u narednim godinama i da ukaže na najbitnije stvari na koje bi trebalo obratiti pažnju. Ovaj problem je apsolutno uspio da isuni, možda čak i nadmaši taj njegov zacrtani cilj. Pored toga što, prema nekim mišljenjima nije rešen, a objektivno i dalje izaziva sukobe mišljenja u matematičkom svetu, ovaj problem je uspio da usmeri za više desetljeća način na koji se razvijala teorija skupova. Mnoge bitne teorije i metode su osmišljene upravo za njegovo rešavanje. Čak i dan danas postoje mnogi matematičari koji se njime bave, a nove aksiome u teoriji skupova se često proveravaju upravo na ovoj hipotezi. Samim tim možemo reći da ona i danas 120 godina posle Hilbertovog izlaganja, na bitan način utiče na razvoj matematike; a naročito teorije skupova.

2 Problem 2 - Neprotivrečnost aksioma aritmetike

2.1 Opšti opis problema

Čovek uvek treba da teži napretku, bez obzira šta radili uvek se moramo truditi da to bude najbolje moguće. Ovo pravilo važi kako za matematiku i nauku u globalu, tako i za život u onom najopštijem smislu te reči. Kao što za izgradnju kuće, prvo o čemu moramo da brinemo jeste da temelj bude čvrst i stabilan, tako i u ovom nama interesantnom slučaju; prvo o čemu moramo da brinemo jeste da nam "matematički"temelj bude najbolji mogući, nadamo se savršen. Verovatno je ovako nešto na umu imao i David Hilbert 1900. godine, kada je razmišljao o drugom od svoja 23 problema. Kao što i sami naslov kaže drugi problem se tiče neprotivrečnosti aksioma aritmetike; a opis šta to u stvari znači najbolje je dao sam Hilbert na kongresu u Parizu 1900. godine. On je tada ovaj problem definisao na sljedeći način:

Đokazati da [aksiome aritmetike] nisu protivrečne, tj. da se polazeći od njih u konačnom broju koraka, ne može doći do rezultata koji protivreče jedan drugom."

Aksiome koje je trebalo ovaj problem da obuhvati bile su sljedeće: aksiome polja, aksiome uređenja, Arhimedova aksioma i aksioma koja govori da se sistem ne može dalje širiti. Ove aksiome se odnose na aritmetiku realnih brojeva, što je i bila prvobitna Hilbertova zamisao. U kasnijim godinama, ovome problemu se pristupalo na nešto drugačiji način. Preovladalo je mišljenje da ovo treba dokazati za aritmetiku prvo prirodnih brojeva i Peanove aksiome, pa tek nakon toga dokaza bi se moglo preći na realne brojeve.

Ovaj problem je i prema mišljenju mnogih matematičara toga vremena posebno značajan i posebno težak jer je uopšte teško doći na ideju kojim putem krenuti u njegovo rešavanje. Treba napomenuti da Hilbert nije želio da se do rešenja dođe dokazavši ga u nekoj drugoj teoriji za koju se veruje da je konzistentna. Na primer konzistentnost geometrije može se utvrditi dokazivanjem u sistemu realnih brojeva, dok se za problem aritmetike kao osnove matematike tražio neki neposredan dokaz. Ono što je Hilbert želio jeste da dokaz bude ne u sklopu nekog ekvivalentnog sistema Peanovom sistemu, već da se uspostavi jači sistem đrugog reda"[4] u kojem bi se moglo naći rešenje za ovaj problem. On je čak 4 godine nakon kongresa i dao neke smernice; kako on razmišlja da bi se trebalo krenuti u rešavanje ovoga problema. Da bi smo dokazali da sve formule u aritmetici imaju neko svojstvo, prvo moramo da dokažemo da aksiome imaju to svojstvo i da pravila zaključivanja koja koristimo održavaju isto to svojstvo. Ovaj način razmišljanja preovladavao je i u većini kasnijih pokušaja dokazivanja ovoga problema. Za ovaj pristup trebalo je prvo formalizovati aritmetiku. Odnosno posmatrati aritmetiku kao skup formula, a teoreme aritmetike se dobijaju primenom pravila zaključivanja na skup aksioma. Samim tim može se reći da su teoreme sve fomule do kojih se može doći u datom sistemu, polazeći od aksioma i primenom konačno mnogo pravila zaključivanja. Najvažniji za nas sistem koji formalizuje aritmetiku je Peanov sistem prvog reda, koji smo ranije pominjali. U svojim kasnijim godinama, Hilbert se i dalje interesuje za dokazivanje

[4]Peanov sistem je sistem prvog reda.

neprotivrečnosti aksioma aritmetike, ali su sklopu svoga velikog projekta tzv. "Hilbertovog programa[5]", koji je još jedna od stvari po kojima je Hilbert poznat.

Kao što smo rekli na početku poglavlja i u uvodnom delu, Hilbert je smatrao da sva matematika proizilazi iz ispravno odabranog skupa aksioma koji je dokazano konzistentan. To je svakako lepa zamisao koja suštinski ima svrhu da formalizuje i normatizuje celokupnu matematiku. Ovo je jedna od njegovih najznačajnijih zamisli vezanih za filozofski aspekt matematike, a svoj konačni formalni oblik je dobila u takozvanom Hilbertovom programu. Ovakva ideja je može se reći došla u pravo vreme; kada je matematika bila u nekoj da kažemo krizi. Početkom toga 20. veka, pokušaji da se objasne osnove matematike nailazio je na mnoge probleme i paradokse. Tada je Hilbert predložio formiranja skupa aksioma koji bi bio dokazano konzistentan. Iz toga "jednostavnogšistema, mogla bi se kasnije dokazati konzistentnost, složenijim i većih skupova, kao što je skup realnih brojeva.Konačno i konzistentnost celokupne matematike bi se mogla svesti na konzistentnost aritmetike. Suštinski glavni cilj ovoga projekta, bio je da se stvori, kao što smo već nekolika puta naveli, čvrst osnov za dalji razvoj matematike. To je trebalo da uključi sledećih nekoliko stavki:

- **Sva matematička tvrđenja trebala bi biti napisana na preciznom, formalnom jeziku i korišćena prema tačno utvrđenim pravilima.**
- **Dokaz da sva tačna matematička tvrđenja, mogu biti dokazana u formalnom smilu**
- **Dokaz konzistentnosti**
- **Dokaz da se bilo koji rezultat vezan za realne objekte, može dobiti bez upotrebe idealnih objekata.**
- **Trebao bi postojati algoritam koji nedvosmisleno može odrediti tačnost bilo kog tvrđenja.**

Razlog za stvaranje ovakvog programa, mogli bi smo tražiti u Hilbertovim filozofskim pogledima na matematiku. Suštinski tu imamo nekolike škole, o kojima bi se moglo dugo pisati, ali smatram da to nije toliko bitno za ovaj naš rad. Pokušaćemo da ih navedemo i opišemo samo u najkraćim crtama. Na početku imamo formalizam koji tvrdi da matematika ne treba da govori o realnim objektiva. Sa formalističke tačke gledišta beskonačnost je objektivna, iako čovjek ne može nju da sagleda. Kao što mu i ime kaže u njegovoj osnovi se nalazi "forma", temeljne aksiome su kao šahovske figure koje povlačimo po striktno uređenim pravilima. Formalisti matematičke iskaze posmatraju sa strane korisnosti više nego

[5]metamatematika - nauka koja proučava matematiku sa dubljeg, filozofskog aspekta.

istinitosti. Blizak formalizmu je platonizam. Platonisti smatraju da svet matematike postoji nezavisno od našeg sveta. U nekom svetu ideja. U tome svetu aksiome i pravila već postoje, a matematičari ih samo istražuju. Za njih je beskonačnost postojana stvar, bez obzira što ljudski um nije u mogućnosti da je konstruiše. Kao treća škola javlja se konstruktivizam, za koji možemo reći da "priznaješamo realne i postojane objekte. Konstruktivizam smatra da matematika treba da se bavi samo objektima koje ljudski um može da konstruiše, konačnim objektima. Prema tome u za pobornike ovakvog viđenja stvari beskonačnost ne postoji objektivno.

Za Davida Hilberta bi smo mogli reći da je bio nešto između formaliste i konstruktiviste; mada je prihvatao i neke ideje platonizma. Cilj njegovog programa bio je da u stvari isključi beskonačnost iz matematike. To isključivanje ne znači zabranjivanje, nego na neki način njeno prebacivanje u fikcionalni domen. Za Hilberta se jedino ova konačna matematika odnosi na nešto, jedino konačne stvari ljudski um može da shvati i analizira i samim tim on staje na stranu ekstremnom konstruktivizma. Sa druge strane, kao što sam naveo ranije, Hilbert nije želio da se odrekne ni Kantorovog rada. Po njemu je beskonačnost vezana za idealne iskaze, kao što u geometriji uvodimo tačke u beskonačnosti tako on podržava uvođenje idealnih iskaza u finitističku[6] matematiku, u cilju njenog lakšeg i boljeg objašnjenja. Ovi iskazi se ne bi odnosili ni na šta i samim tim on podržava formalističko viđenje stvari; što je većim delom života dominatno i bio.

2.2 Rešenost problema

Drugi Hilbertov problem kao i prvi nema opšteprihvaćen stav o njegovoj rešenosti. Ipak najznačajniji radovi na ovome polju su svakakako Godelov i Gentezenov rad, koji su za određeni broj matematičara i rešenja ovoga problema.

Godelove teoreme su dve jako poznate teoreme koje govore o ograničenjima svakog formalnog aksiomatskog sistema sposobnog da modeluje osnovnu aritmetiku.Ove teoreme je Godel predstavio 1931. godine i predstavljaju vrlo značajne radove iz matematičke logike i filozofije matematike. Prva teorema govori o tome da ni jedan konzistentan sistem aksioma, čije teoreme mogu biti efektno nabrojane (postoji algoritam za njihovo formiranje) ne može dokazati sve istine aritmetike prirodnih brojeva. Samim tim za svaki takav sistem uvek će postojati tvrđenja koje je za sve prirodne brojeve tačno, ali nedokazivo unutar sistema. Druga teorema nekompletnosti je samo nadogradnja prve i ona dokazuje da ni jedan sistem ne može pokazati svoju sopstvenu konzistentnost. Formalni iskaz prve teoreme o nepotpunosti bi izgledao ovako:

[6] matematika u kojoj su samo iskazi koji se ne pozivaju na beskonačnost

Za bilo koju formalnu teoriju koja potvrđuje osnovne aritmetičke istine, može se konstruisati aritmetičko tvrđenje koje je istinito, ali nije dokazivo unutar same te teorije. To znači da bilo koja teorija koja je sposobna da izrazi elementarnu aritmetiku ne može biti u isto vreme konzistentna i potpuna.

Nećemo zalaziti u temeljnu matematičku analizu ove teoreme, ali ćemo na jednostavan način pokušati da iskažemo o čemu ona govori. Neka G_F, bude Godelova rečenica[7] za sistem F. Godelova rečenica je neka nedokaziva konstrukcija u sistemu F. Za svaki sitem možemo pronaći beskonačno mnogo G_F. Moguće je definisati veći sistem F', koji će sadržati celokupan sistem F, plus G_F kao njegov aksiom. Ovo neće rezultovati kompletnošću F', jer se Godelova teorema može primeniti i na F' pa samim tim on neće biti kompletan. Ovim će G_F biti teorema u F', koju možemo vrlo lako dokazati u tom sistemu. Naravno upotrebom teoreme o nekompletnosti na sistem F' dobijamo novu Godelovu rečenicu koju je nemoguće dokazati. Druga teorema se samo nadoveuje na ovu, uopštavajući slučaj.

Sve ovo verovatno izgleda konfuzno, donekle i razumljivo. Ali sva priča se svodi na to da je Godel dokazao da Peano aritmetika, ne može biti dokazana unutar same sebe. Samim tim u nekom najformalnijem smislu, drugi Hilbertov problem je nerešiv, odnosno nedokaziv. Ali tu svakako nije kraj našim mogućnostima jer ove dve teoreme ne isključuju dokazivanja uz pomoć nekog drugog mehanizma. Jedan takav mehanizam osmislio je Gerhard Gentzen, o tome ćemo pričati u idućem pasusu, ali treba ovde naglasiti da postoje 2 mane zbog kojih ovaj mehanizam nije prihvaćen kao opšti dokaz. To je jedan meta-matematički dokaz koji nije finitistički i ne može biti prezentovan putem aritmetičkog kalkulusa. Budući da je to bila Hilbertova originalna zamisao, ovaj dokaz se ne prihvata kao konsenzus među svim matematičariima. Godelove teoreme ne isključuju mogućnost čak ni nekog finitističkog dokaza upotrebom više aritmetike, ali na žalost do dana danas niko nema ideju kako bi taj finitistički dokaz trebao da izgleda. Insistiranje na finitizmu je sasvim opravdano jer na taj način bi smo dobili dokaz da matematika se bavi realnim stvarima i da je to samo ekspresija realnog sveta i svakodnevnih objekata.

Kao što sam već ranije naglasio, konzistentnost matematike je ipak moguće dokazati u okviru neke "jače"i veće teorije koja bi se bavila aksiomima drugog reda. Takva je već pominjana Zermelo-Frankel teorija skupova sa aksiomom izbora. Problem sa ovim dokazom jeste što neko ko ne veruje u konzistentnost Peano aritmetike, teško da može(ili želi) da poveruje u konzistentnost aksioma drugog reda neke veće i jače teori-

[7] Godelova rečenica je u stvari aritmetičko tvrđenje da ni jedan broj ne postoji sa određenim svojstvima. Njena nezavisnost od sistema F proizilazi iz činjenice da ne postoji prirodan broj sa takvim karakteristikama.

je. Pobornici tvrđenja da je ovaj problem ipak rešen za osnovu uzimaju Gentzenov dokaz konzistentnosti. Taj dokaz Gentzen je publikovao 1936. godine. On je u svom radu svaki dokaz koji postoji u Peano aritmetici označio sa jednim rednim brojem. Išao je tako redom do ordinala koji ćemo označiti sa ϵ_0, koji će biti naš poslednji ordinal. Samim tim sve ove dokaze smo poređali linearno, pri čemu važi da svaki dokaz zavisi od tačnosti onoga ranijeg dokaza. Tu se javlja jedan problem jer za numerisanje dokaza u aritmetici nisu dovoljni samo prirodni brojevi, već se moraju koristiti i transfinitni ordinali[8]. Razlog tome je što se može desiti da tačnost nekog dokaza zavisi od beskonačno mnogo dokaza koji su se pojavili prije njega. Ključni dio problema je da napravimo ovaj uređeni red koji nam dava dokaze po složenosti. Odatle upotrebom transfinitivne indukcije i aksioma primitivne rekurzivnearitmetike možemo dokazati da su svi dokazi tačni. Upravo u ovoj transfinitivnoj indukciji i nastaje problem, jer nju ne možemo uvrstiti među finitivne metode. Ovoj je bio začetak ordinalne analize u teoriji dokaza. U ovoj teoriji svakoj formalnoj aritmetičkoj teoriji ili skupu teorija dodjeljuje se jedan redni broj kao mjera jačine konzistentnosti. Teorija ne može da dokaže konzistentnost druge teorije sa većim ordinalnim brojem.

2.3 Rezime

Tema: Glavni cilj drugog Hilbertovog problema jeste da se dokaže neprotivrečnost aksioma aritmetike. To podrazumeva dokaz da polazeći od osnovnih aksioma aritmetike u konačno mnogo koraka ne možemo dobiti kontradikciju.Kasnije je ovaj problem dobio jedan da kažemo novi i značajniji obliku u sklopu Hilbertovog programa. Hilbertov program imao je za cilj da normatizuje do srži celu matematiku. Ovaj program, na žalost nikada nije ostvaren u onom obliku u kojem ga je HIlbert zamislio. Najveći problem je bila sama neophodnost upotrebe idealnih objekata za dokaz, kao i nemogućnost pronalaska algoritma za određivanje tačnosti, kao konzistentnost. Uz određene modifikacije ipak se može doći do neke vrste Hilbertovog programa, ali on daleko odstupa od prvobitne zamisli. Za mene, iskreno je Hilbertov program, jedna od najlepših zamisli i ideja za koje sam čuo u matematici. Uopšte taj stepen uređenosti aritmetike, mora biti nešto što bi svakoga oduševljavalo.

Rešenost problema: Matematika u mnogo slučajeva ne želi da prizna neodlučan odgovor ili je nešto tačno ili nije. Sa drugim Hilbertovim problemom to nije slučaj. Mnogi svetski matematičari se ni danas ne slažu da li je problem rešen ili nije. Ono što je definitivno jeste da nije rešen na način na koji je Hilbert želio da to bude ostvareno. Sa jedne strane imamo Godelov rad koji nam govori da će u bilo kojem sistemu uvek postojati tačno tvrđenje koje ne možemo dokazati. Odnosno ni jedan konzistentan sistem ne može dokazati sopstvenu tačnost niti konzistentnost, unutar sa-

[8]beskonačni ordinali

mog sebe. Samim tim u onom najbukvalnijem smislu, kakvim je u startu ovaj problem zamišljen mi i dalje nemamo dokaz. Sa gledišta konstruktivizma ni jedan drugi pristup nije prihvatljiv i u tom pravcu moramo i dalje tražiti rešenje. Sa druge strane imamo Gentzenov dokaz konzistentnosti Peanove aritmetike, koji takođe veliki broj matematičara prihvata kao krajnje rešenje ovoga problema. On je dokazao da se konzistentnost Peanove aritmetike može dokazati na sistemu koji je mnogo slabiji od ZF teorije skupova. Najveća mana ovoga dokaza je upotreba transfinitivnog indukcionog procesa.

Značaj: Značaj ovoga problema je možemo reći pa očigledan. Konzistentnost aritmetike, kao osnove celokupne matematike, je sam po sebi bitan jer predstavlja kvalitetnu osnovu za bilo kakav dalji razvoj. Sem toga u toku istraživanja vezanih za nepotpunost formalne aritmetike nastalo je mnogo novih metoda i teorema koje se mogu koristiti i u drugim oblastima. Na indirektan način sa temom nekompletnosti aritmetike vezani su: Teorema Tarskoga o neodređenosti, Čerčov dokaz za nerešivost Entscheidungsproblem[9] i Tjuringova teorema da ne postoji algoritam za rešavanje *problema zaustavljanja.* Konzistentnost bilo kojeg sistema je uvek ključno pitanje, konzistentnost aritmetike je samim tim jedno od najbitnijih pitanja matematike. To samo po sebi dovoljno govori o značaju ovoga problema.

3 Problem 3 - Razlaganje poliedara

3.1 Opšti opis problema

Treći sa Hilbertove liste problema je prvi koji se bavi čistom geometrijom i prvi koji je rešen, a čije rešenje jednoglasno priznaju svi matematičari.O ovom problemu na samom kongresu Hilbert je rekao sledeće.

"U dva pisma Gerlingu, Gaus sa žaljenjem tvrdi da pojedine teoreme fundamentalne geometrije zavise od motode iscrpljenosti to se odnosi u modernoj frazeologiji na aksiomu kontinuiteta(ili na Athimedovu aksiomu). Gaus posebno pominje Euklidovu teoremu, da se trougaone piramide jednake visine odnose jedna prema drugoj onako kako se odnose njihove baze. Sada je analogni problem u osnovi rešen[10]. Gerling je takođe uspio da dokaže jednakost zapremina simetričnih poliedara deleći ih na kongruentne delove. Ipak

[9] Bukvalno "Problem sa odlukom". Akermanov i HIlbertov izazov za pravljenje algoritma koji na ulazu uzima neko tvrđenje, a na izlazu dava ĐA"ili "NE"u zavisnosti da li je tvrđenje tačno u svakoj mogućoj strukturi.

[10] Analogni problem se odnosi na problem disekcije mnogougla na konačno mnogo delova, od kojih bi se kasnije mogao formirati drugi mnogougao translaciom i rotaciom tih delova. Ovo je dokazano na početku 19. veka Valas-Bolijai-Gervinovom teoremom, koja kaže da je uslov da i početni i krajnji mnogougao budu jednake površine.

meni liči da generalni dokaz ovakve Euklidove teoreme, koju sam upravo pominjao je nemoguć i naš zadatak bi trebao biti da upravo pronađemo strog dokaz za ovu nemogućnost.

Konkretno pitanje vezano za ovaj problem glasi: Uzevši bilo koja dva poliedra jednake zapremine, da li je moguće razlaganjem prvog na konačno mnogo manjih poliedara, ponovnim sastavljanjem dobiti drugi poliedar? Ovo pitanje se prvo postavljalo za jednostavniji slučaj ravanske geometrije. To je dalo i osnovu da se isto pitanje postavi i u prostornoj geometriji. Istorijski interesovanje za ovu tematiku počinje od opšte formule za zapreminu piramide.

$$\frac{basearea * height}{3}$$

Ova formula izgleda jednostavno, ali za njeno izvođenje potrebna je upotreba nekih graničnih procesa i kalkulusa, naročito metod isrpljenosti ili njegova modernija forma *Kavalijerijev princip.*Znatno jednostavnije i jednostavnije ovakve formule se mogu uzvesti u ravanskoj geometriji. Gaus je primetio ovu anomaliju, a Hilbertu je to bio motiv da se jednostavno zapita "Je li moguće dokazati jednakost zapremina jednostavnom metodom "iseci i zalepi"? Ako je odgovor ne, onda su elementarni dokazi Euklidovih rezultata takođe nemogući.

U vezi ovoga problema treba definisati pojmove kongruencije i unakrsne kongruencije. Kažemo da su figure F i G kongruentne u oznaci $F \cong G$, u koliko postoji izometrija koja slika $F \to G$. Kongruencija je u stvari bijekcija koja čuva rastojanje. Sa druge strane kažemo da su 2 figure unakrsno kongruente[11]u koliko imamo particije figura F i G u oznaci $F_1...F_k$ i $G_1...G_k$ za koje važi $\forall i F_i \cong G_i$ Suštinski ova kongruencija je mogućnost da jednu figuru(u našem slučaju poliedar) možemo podeliti na konačno mnogo manjih poliedara, a zatim ih opet složiti u drugi poliedar. Iz unakrsne kongruencije sledi da te figure imaju istu zapreminu (za ravansku geometriju, površinu). Hilbert je tražio dokaz u suprotnom smeru.

3.2 Rešavanje problema

Kao što smo već napomenuli ovaj problem je prvi od svih Hilbertovih problema rešen. I to iste godine kada ga je Hilbert objavio. Šta više imamo mnoštvo dokaza i svi govore da nije moguće uzeti bilo koja dva poliedra jednake zapremine i razlaganjem jednoga dobiti drugi. Prvi dokaz se pojavio prije same 1900. godine. Na žalost bio je netačan; njega je izdao Raul Bricard 1896. godine. Iako netačan ovaj dokaz je itekako poslužio Hilbertovom učeniku Maksu Denu koji je i prvi izdao dokaz.

[11]scissors congruente - nisam siguran za prevod termina

Taj dokaz je bio prilično teško razumljiv, pa ga je pristupačnijim i jednostavnijim učinio Venjamim Kagan sa Univerziteta u Odesi. Sredinov 20. veka Hadviger, Švajcarski geometar, zajedno sa svojim studentima nove osobine ekvidekomposabilnost [12] što je omogućilo transparentniji prikaz Denovog dokaza.Kasnije je rad nastavljen i unapređen da bi smo na kraju došli do konačne verzije dokaza koji postoji u knjizi "Proof from the Book", čiji će link do PDF verzije biti ostavljen u referencama.[13]

Kada pominjemo najbitnije matematičke probleme, većina nas bi pomislila da za njihovo dokazivanje treba osmisliti neki potpuno novi i inovativan metod. U suštini jeste, ali sve polazi od onoga najprostijeg razmišljanja koje se koristi još u osnovnoj školi. Takav je slučaj i ovdje, Den je pošao od one najednostavnije zamisli, a to je pronalazak kontraprimera. To je i bio prvi dokaz nemogućnosti izvođenja pomenute zamisli. Nego krenimo redom. Dokaz koji ću vam sad predstaviti biće skraćena verzija dokaza koji se nalazi u knjizi "Proof from the Book". Ovde nemam prostora za bilo kakvu detaljnu analizu jer bi to uzelo premnogo i vremena i prostora, a onaj koga interesuje više svakako može da pogleda u samoj knjizi.

Za svaki konačan skup realnih brojeva

$$M = \{m_1 ... m_k\} \subseteq R$$

definišemo V(M) kao vektorski prostor nad poljem racionalnih brojeva Q kao skup svih linearnih kombinacija brojeva iz M, sa racionalnim koeficjentima $q_i \in Q$. Ovakvo V(M) je očigledno zatvoreno za sve operacije sabiranja i množenja sa racionalnim brojevima. Dimenzije V(M) su svakako dimenzije njegovog najmanjeg generatorskog skupa(baze), a to je u ovome slučaju M. Pa važi:

$$dim_Q V(M) = |M|$$

U nastavku trebali bi definisati Q-linearnu funkciju takvu da

$$f : V(m) \to Q$$

. Ona je u stvari linearna mapa Q vektorskih prostora. Njena glavna osobina jeste da za svaku racionalnu linearnu zavisnost

$$\sum_{i=1}^{k} g_i * m_i = 0$$

[12]Equidecomposability - ne postoji reč u našem jeziku za ovo. Osobina da jedno telo možemo složiti od svih delova drugog.

[13]Pretpostavljam da ova verzija nije legalna, jer sam nalazio na dosta mesta da se prodaje i sama pdf verzija. Ali se snalazimo.

sa $q_i \in Q$ mi moramo imati

$$\sum_{i=1}^{k} g_i * f(m_i) = f(0) = 0$$

Navodim lemu koja govori o tome bez dokaza; dokaz postoji u knjizi i jednostavan je. Za svaki konačan podskup $M \subseteq M'$ od R, racionalni vektorski prostor V(M) je podprostor racionalnog vektorskog prostora V(M'). Tako da ako ako $f : V(M) \to Q$ je Q-linearna funkcija onda f može biti prošireno na $f' : V(M') \to Q$ tako da $f'(m) = f(M)$ za $\forall m \in M$

Ključni pojam za rešavanje ovoga problema je svakako za nas do sad nepoznat i naziva se Dinova nepromenljiva. Za trodimenzionalni poliedar P, označimo sa M_P skup svih uglova između susednih stranica zajedno sa brojem π. Tako da za kocku C imamo $M_C = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$, a za ortogonalnu prizmu Q nad jednakostraničnim trouglom imamo $M_Q = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. Uzevši bilo koji konačan skup $M \subset R$ koji sadrži M_P, racionalno linearnu funkciju

$$f : V(M) \to Q$$

koja zadovoljava $f(\pi) = 0$, mi definišemo da je Denova nepromenljiva od P, realan broj

$$D_f(P) := \sum_{e \in P} l(e) f(\alpha(e))$$

. Gde e obuhvata sve ivice poliedra, a sa l(e) označavamo dužinu ivice e i $\alpha(e)$ je ugao između 2 susedne stranice koje se sreću na ivici e. Za sada je bitno zapamtiti da je $f(\frac{pi}{2}) = \frac{1}{2} * f(\pi)$ i zato je $D_f(C) = 0$ i to je Dinova neprovemljiva za kocku.

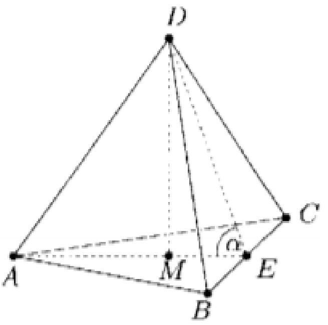
Treća i najbitnija stvar, pre nego konačno dođemo do našeg kontraprimera je Din-Hadvigerova teorema. Kao što smo možda već pomenuli dva poliedra P i Q su ekvidekomposabilni[14] u koliko oni mogu biti razloženi na konačne skupove $P_1 ... P_k$ i $Q_1 ... Q_k$ tako da važi $\forall i$ P_i i Q_i su kongruentni. Takođe kažemo da su dva poliedra ekvikompletabilni ako ih razložimo na $P_1 ... P_m$ i $Q_1 ... Q_m$, tako da unutrašnjost P_i je disjunktna, jedna od druge i od P. Isto važi i za Q_i i Q. Tako da P_i je kongruentno sa Q_i za $\forall i$, i tako da važi $P = P_1 \bigcup P_2 \bigcup ... \bigcup P_m$ identično za Q. Takođe su ekvidekomposabilni. Gerlingova teorema tvrdi da nije bitno da li uzimamo osobinu reflekskije kada utvrđujemo kongruenciju. Jasno je da iz ekvidekomposabilnosti sledi ekvikompletabilnost, ali obrnuto nije tako jasno. Upravo ova obrnuta relacija nas više interesuje. Sada navodim Din-Hardvigovu teoremu bez dokaza, koji je donekle i komplikovan, a ima ga u već pomenutoj knjizi.

[14]opet napominjem da tačan prevod ne postoji ili ga bar ja ne znam

Neka su P i Q poliedri sa uglovima između stranica $\alpha_1\alpha_2...\alpha_p$ i respektivno $\beta_1\beta_2...\beta_q$i neka M bude konačan skup realnih brojeva $\{\alpha_1...\alpha_p\beta_1...\beta_q\} \subseteq M$, ako je $f : V(M) \to Q$ bilo koja Q-linearna funkcija za koju je $f(\pi) = 0$ tako da $D_f(Q) \neq D_f(P)$, tada P i Q nisu ekvikompletabilni.

Sada smo se upoznali sa svim potrebnim novim definicijama i teoremama koje su nam potrebne za pronalaženje kontraprimera. U ovom radu mi ćemo navesti jedan kontraprimer, u knjizi ih svakako ima više, ali mislim da se na ovome primjeru može videti suština.

Kontraprimer: Neka je T_0 regularni tetraedar sa dužinom ivice l, mi računama ugao između stranica sa skice. Težište baze trougla deli visinu AE u odnosu 1:2, pošto je $|AE| = |DE|$, mi nalazimo da je $cos(\alpha) = 1/3$ i tako je $\alpha = arccos(\frac{1}{3})$



Definišući $M := \{\alpha, \pi\}$ primećujemo da je odnos:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi} arccos(\frac{1}{3})$$

Ovaj odnos je svakako iracionalan, po teoremi koja glasi: Za svaki neparni celi broj n koji je veći ili jednak broju 3 važi da broj

$$A(n) := \frac{1}{\pi} arccos(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

je iracionalan.
V(M) je dvodimenzionalni vektorski prostor, sa bazom M, nad poljem Q. A f je $f : V(M) \to Q$ takva da je $f(\pi) = 0$ i $f(\alpha = arccos(\frac{1}{3})) = 1$. Za ovakvo f imamo da je

$$D_f(T_0) = 6lf(\alpha) = 6l \neq 0$$

Ovim smo dokazali da je Dinova nepromenljiva ovako definisane figure različita od Dinove nepremenljive kocke koja je za svako f nula. Time te dve figure nisu ekvidekomposabilne ni ekvikompletabilne. Samim tim smo našli kontraprimer koji pokazuje da nije moguće za bilo koja 2 poliedra jednakih zapremina, deljenjem jednog i ponovnim slaganjem dobiti drugi. Ovim je naš dokaz gotov. Postoje dve stvari koje bi mogle zbunjivati u ovom dokazu prva je vektorski prostor V(M), koji u stvari predstavlja skup svih linearnih kombinacija brojeva iz konačnog skupa M sa racionalnim koeficjentima $V(M) := \{\sum_1^k g_i m_i\} \subseteq R$, svako q_i pripada skupu racionlanih brojeva, a m_i je iz skupa M. Ovakva struktura je zatvorena za sabiranje i množenje sa racionalnim brojevima i zajedno sa aksiomima polja R čini vektorski prostor. Ovo nazivamo Q-vektorski prostor. Druga stvar je linearna mapa f. Najbitnija karakteristika linearne mape je da nam ona čuva strukturu originalnog domena prostora. Lakše rečeno čuva operacije sabiranja i skalarnog množenja. Najplastičnije rečeno linearna mapa slika jedan linarni podprostor u drugi(najčešće manjih dimenzija), na primer slika slika ravan iz jednoga prostora u ravan liniju ili tačku drugog prostora. Nasnije se ovo pitanje dalje unapređivalo, dokazano je i za četiri dimenzije ali to trenutno nije predmet našeg interesovanja.

3.3 Rezime

Tema: Ovo je prvi od Hilbertovih problema koji je rešen. Tiče se toga da uzevši bilo koja dva poliedra jednakih zapremina, da li je moguće razlaganjem prvog na konačno mnogo manjih poliedara, ponovnim sastavljanjem dobiti drugi poliedar? Važno je napomenuti da je odgovor na analogno pitanje u dve dimenzije potvrdan. Prvi koji je primetio ovaj problem bio je Gaus, zbog određenih aproksimacija koje su primenjne za izvođenje formule za zapremiu piramide.

Rešenost: Problem je u potpunosti rešen. Prvo rešenje dao je Maks Din još iste godine kad je i objavljen, pronašavši kontraprimer. Kasnije su mnogi radili na ovome problemu i različite verzije i modifikacije dokaza su nastale.

Značaj: Kao i svaki drugi problem sa ove liste i ovaj je veoma bitan. Od najranijih dana čak se i deca trude da rastavljanjem i sastavljanjem lego kockica dobiju različite oblike. To čovekovo interesovanje za trensformaciju geometrijskih oblika i njihovu analizu vuče korene još iz stare Grčke. Kao što je i Hilbert naveo negativan odgovor na njegovo pitanje dovodi u sumnju neke dokaze euklidske geometrije. Takože razmatranje ovoga problema u mnogome je doprinelu smeru kojim će izučavanje geometrije ići u budućim godinama. Što je u ostalom i cilj svakog od ovih problema.

4 Problem 4 - Problem prave linije kao najkraćeg rastojanja između tačaka

4.1 Opšti opis problema

Koliko samo ovaj naslov izgleda jednostavno! Počevši priču o ovome problemu iskreno razmišljao sam "Koliko težak može biti problem koji se tiče obične prave linije?". Bio sam debelo u krivu. Čitajući neke materijale shvatio sam da je ovo izuzetno kompleksan problem. Ali mi ćemo pokušati da na najednostavniji način prezentujemo ono što nam se činilo savladivim.

Kao i treći problem i ovo pitanje se tiče osnova geometrije. Imamo više njegovih različitih shvatanja i interpretacija. Mi ćemo u nastavku pokušati da parafraziramo Hilbertovu originalnu zamisao iz 1900. godine, jer svakako da iz nje proizilaze sve njene kasnije interpretacije. Hilbert je počeo sa jednom prilično jednostavnom zamisli. "Ako iz euklidske geometrije izbacimo samo aksiom paralelnost, ili pretpostavimo da on ne važi, dobićemo geometriju Lobačevskog poznatiju kao hiperbolička geometrija. Ona se, možemo reći nalazi odmah do euklidske geometrije. Ako dalje zahtevamo da pomenuti aksiom ne bude zadovoljen, pri čemu za tri tačke prave linije, jedna i samo jedna leži između druge dve, tada dobijamo Rimanovu, odnosno eliptičku geometriju, koja se pojavljuje odmah do geometrije Lobačevskog."Ovim rečima je Hilbert počeo svoje izlaganje o ovome problemu na kongresu 1900. godine. Možda bi trebalo malo pojasniti razliku između ove tri geometrije. Suštinski ključna razlika je u paralelnosti linija. Euklidska geometrija kaže da u koliko imamo pravu p i tačku A, kroz tu tačku se može provući samo jedna prava q paralelna pravoj p. Kod hiperboličke geometrije možemo kroz A nacrtati beskonačno mnogo pravih paralelnih pravoj q, dok kod eliptičke geometrije paralelne prave jednostavno ne postoje. U daljem razmatranju Hilbert primećuje da se isto razmatranje se može primeniti i u vezi Arhimedovog aksioma. Na taj način bi smo dobili ne-arhimedovsku geometriju. Dalje se pitanje postavlja samo po sebi; na koji način možemo stvoriti i otkriti sve geomterije koje stoje "rame uz ramešа euklidoskom geometrijom?

Svima nam je poznata definicija da je prava linija najkraće rastojanje između 2 tačke. Suština ovoga tvrđenja svodi se na poznatu teoremu da je zbir dužina 2 stranice u trouglu uvek veći od treće stranice. Ovo je osnovna teorema koju je Euklid dokazao polazeći od teoreme o spoljašnjem uglu i teorema o kongruenciji. Danas je dokazano da se ova teorema ne može dokazati samo pomoću teorema kongruencije, ali nam je svakako potrebna za ovu našu zamisao. Na ovaj način dolazimo do konačne naše formulacije pitanja. **Pronaći geometriju u kojoj važe svi aksiomi euklidske geometrije, aksiomi kongruencije i kao dodatni aksiom već pomenuta teorema o "nejednakosti trou-**

glova". Kao što vidimo ovo pitanje otvara jednu potpuno novu granu za istraživanje geometrije.

4.2 Rešenost problema

Za razliku od prethodna 3 pitanja, za koje smo mogli tražiti konkretan odgovor, ovo pitanje je ono na koje ne možemo tražiti konkretan odgovor. Ovo je pitanje koje stalno dobija odgovore i koje se stalno razvija. Zbog toga odmah na početku treba istaći da je ova tema suviše nerazjašnjena da bi smo tačno definisali da li imamo ili nemamo odgovor. Ali svakako je da imamo dosta interesovanja i radova na ovu temu.

Hilbert je još na kongresu, koji smo bezbroj puta ovde pomenuli, kazao da je Minkovski već ranije pronašao jedan primer takve geometrije. Tu imamo još Finslerovu metriku[15], Funkovu metriku... Čak je i sam Hilbert dosta istraživao ovo pitanje. Ključno je bilo naći sve metrike u kojima su linije projektovanog prostora geodeze[16]. Dokazano je da za rešavanje ovoga problema potrebno je da metrički prostor zadovoljava Desagruovu teoremu. A ona kaže: *ako 2 trougla leže u ravni tako da linije koje spajaju odgovarajuća temena trougla imaju presek u jednoj tački, tada tri tačke koje nastaju kao preseci produžetaka odgovarajućih stranica takođe leže na jednoj liniji.*Ovo je prvi korak koji nas značajno približava rešenju. U dvodimenzionalnom prostoru važi ovakva formulacija, dok u prostoru koji ima više od dve dimenzije, te tri tačke treba da leže u jednoj ravni. Za ovakav Desagruov prostor, Hamel je dokazao da svako rešenje 4. problema može da se predstavi u realnom projektnom prostoru[17]. Metrika ovakvog prostora naziva se ravna ili projektivna. Na ovaj način problem smo sveli, na problem konstuktrukcijskog određenja kompletne ravne metrike. Hamelov dokaz ipak nije obuhvatio celokupnu metriku već samo njen manji podskup, problem i dalje ostaje onakav kakav je bio. Jedino što znamo da aksiome geometrije u koliko se razmatraju na ovaj način impliciraju kontinualnost metrike. Problem smo ovakvim razmatranjem sveli na konstrukcijsko određivanje svake kontinualne ravne metrike.

Nakon Hamela, najznačajniji doprinos dao je Herbert Buseman koji je uveo potpuno novu klasu ravne metrike sa svojom $\sigma - merom$ koja je imala sledeće 3 karakteristike.
1. $\sigma(\tau P) = 0$, τP je skup svih pravih kroz tačku P
2. $\sigma(\tau X) > 0$, τX je skup pravih koje prolaze kroz neki segment X koji sadrži pravu
3. $\sigma(RP^n)$ je konačan, gde je P^n realan projektni prostor

[15]metrika - funkcija udaljenosti, funkcija koja određuje udaljenost između 2 elementra nekog skupa

[16]geodeza - najkraća udaljenost između 2 tačke

[17]Euklidov prostor proširen na beskonačnost.

Koristeći σ metriku u prostoru RP^2 definišemo $|x, y| = \sigma(\tau[x, y])$ ovdje je $\tau[x, y]$ skup pravih koje presecaju segment [x,y]. Nejednakost trouglova u ovakvoj metrici se može dokazati iz Pašove teoreme, koja se inače ne može izesti iz Euklidovih postulata, a u čije detalje nećemo ulaziti.
U dvodimenzionalnom prostoru ovaj problem je kompletno rešen od strane Pogorela 1973. godine. Njegova teorema glasi: Svaka dvodimenzionalna kompletna, kontinualna, ravna metrika je $\sigma - metrika$. Vrlo lep i iskaz, ako mene pitate.
Za tri dimenzije iskaz je sličan, samo imamo problem jer u tom slučajuσ može biti pozitivna i negativna, pa samim tim mora da ispuni još neke uslove. Pogorelov je uspio i za ova slučaj da dokaže, ali za više dimenzije se stvar značajno komplikovala.
Za više dimenzije je izvedena generalizovana Pogorelova teorema, 1986. godine.

4.3 Rezime

Tema: Pronaći sve geometrije u kojima važe svi Euklidovi aksiomi uz aksiome kongruencije i "nejednakost trouglova"kao poseban aksiom. Suštinski potrebno je konstruisati sve metrike u kojima su obične linije projektnog prostora u stvari geodeze.

Rešenost: Ovaj problem otkriva jedno potpuno novo polje za istraživanje, koje teško da će u skorije vreme biti iscrpljeno. Zbog toga je prilično nemoguće da kažemo da li je ovaj problem rešen ili nije. Ogroman napredak je napravljen najviše zahvaljujući Džordžu Hamelu, Herbertu Busemanu i Alekseju Pogorelovom, koji je i rešio ovaj problem u potpunosti za dvodimenzionalne prostore. Treba na pomenuti da za takve prostore postoji i još jedan Ambartusimanov dokaz, čiju opštu primenljivost ograničava upravo negativan odgovor na 3. Hilbertovo pitanje.

Značaj: Više puta sam ponovio da je ovo jedan od onih Hilbertovih problema koji je pokrenuo potpuno novu granu istraživanja. Teorema o pravoj liniji kao najkraćoj distanci između tačaka je jedna od najbitnijih teorema u geometriji. Istraživanjem načina za njeno dokazivanje, dalo je ogroman doprinos shvatanju distance uopšte. Takođe data je smernica za sistematski pristup geometriji, kao i značaj njenom boljem razumevanju.

5 Problem 5 - Koncept Lijevih grupa neprekidnih transformacija, bez pretpostavke diferencijabilnosti

5.1 Opšti opis problema

U petom problemu odmah iz naslova vidimo jedan, bar za mene do sada nepoznat pojam, Lijeva grupa. Računajući da se suštinski ovaj problem bavi topološkim proučavanjem pomenutih objekata. Zbog toga je najbolje da odmah definišemo potrebne pojmove.

Do sada smo se u matematici sretali sa pojmom grupe. Grupa je algebarska struktrura sa binarnom operacijom koja zadovoljava aksiome zatvorenosti, asocijativnosti i ima inverzni i neutralni elemenat. Lijeva grupa, je naravno nešto određeniji pojam. *Lijeva grupa je u stvari grupa koja je istovremeno i glatka mnogostrukost, pri čemu su operacije grupe glatke funkcije elemenata grupe.* Glatke funkcije su one funkcije koje u svakoj tački svog domena imaju sve parcijalne izvode do slobodno određenog reda; nazivaju se i beskonačno diferencijabilne funkcije. Mnogostrukost predstavlja apstraktan topološki prostor, gde okolina svake tačke predstavlja euklidski prostor, ali mu je najćešće opšta struktura značajno složenija. Na primer u jednodimenzionalnoj mnogosturkosti, svaka okolina tačke ima izgled kao prava, eto recimo krug. U ovom uvodnom delu često smo pominjali reč topologija, pa možda valja i reći šta je to. Topologija je najmlađa grana matematike koja se bavi proučavanjem geometrijskih osobina i prostornih relacija nevezano za kontinualne promene oblika i veličine posmatranog objekta.

Sada kad znamo sve ove pojmove dosta je lakše definisati o čemu se radi u ovome problemu. Iako pitanje nije baš najpreciznije formulisano, prevashodno zbog toga što pojam "mnogostrukosti"u Hilbertovo vreme nije bio skroz formalno definisan. Kako god, postavlja se pitanje zašto nam je potreban ovaj uslov glatkosti u vezi pomenutih Lijevih grupa? Da li postoji neka razlika u koliko bi smo ovu pretpostavku o glatkoj mnogostrukosti[18] isključili iz razmatranja? Ili možda najformalnije, Hilbertov problem zahteVa razmatranje u kojoj meri nam je potrebna pretpostavka o glatkoj strukturi unutar Lijevih grupa? Česta formulacija bi bila i da je to pitanje karakterizacije Lijevih grupa kao topoloških grupa koje bi bile takođe topološke mnogostrukosti. S obzirom da topološke grupe zahtevaju kontinualnost binarne operacije i funkcije koja slika elemente grupe u njihove inverze mi dobijamo još jedno ekvivalentno pitanje. Jesu li sve kontinualne grupe u stvari Lijeve grupe?

Danas većina naučnika smatra da je ovaj problem rešen, što je bitan napredak jer teorija Lijevih grupa predstavlja osnovu moderne teorije grupa i teoriji topoloških mnogostrukosti. Takođe Lijeve grupe imaju ogromnu primenu u nauci koja je danAs verovatno u najvećem zamahu; teorijskoj fizici.

[18]Glatka mnogostrukost - tip mnogostukosti koji je u jednom delu dovoljno sličan linearnom prostoru, pa nam dozvoljava upotrebu standardnog kalkulusa.

5.2 Rešenost:

Kao i svi ostali Hilbertovi problemi, zbog svojeg značaja i kompleksnosti nisu rešeni odjednom, do rešenja se dolazilo postepeno, prvo u nekim specifičnim slučajevima, a kasnije generalizovano i unapređeno. Prvi značajniji rezultati stigli su 1933. godine i dao ih je Džon von Nojman, oni su razmatrali samo kompaktne grupe. Već 1934. došlo je i do rešenja ovoga pitanja za lokalno kompaktne Abelove grupe, od strane ruskog matematičara Lava Pontrjagina. Iako nije vezano za temu, kuriozitet je da on bio jedan od najboljih matematičara 20. veka, a potpuno slep od svoje 14. godine, što je stvar vredna divljenja. Konačno rešenje, bar u odnosu na Hilbertovu originalnu zamisao, stiglo je 1950-ih u vidu rada Glesona, Montgomerija i Zipina. 1953. godine japanski matematičar Hidehiko Jamabe je iznio svoje rešenje Hilbertovog problema. To rešenje je u stvari bila teorema koja je objašnjavala dublju strukturu iz koje se može odrediti ovo rešenje tri gore pomenuta naučnika. Glesonov, Montgomerijev i Zipinov rad nam govori sljedeće. *Topološka grupa G je u osnovi jedinstvene Lijee strukture, ako i samo ako osnova prostora grupe G je topološka mnogostrukost.* Gleson-Jamabeova teorema glasi: *Ako imamo povezanu lokalno kompaktnu grupu G, onda za svaku otvorenu okolinu U, postoji otvorena podgrupa H od G i kompaktna normalna podgrupa V od H takva da je H/K izomorfna Lijevoj grupi.* Grubo rečeno ovo nam govori da je struktura bilo koje kompaktne grupe u nekom lokalizovanom domenu uvek struktura Lijevog tipa. Dokaz ove teoreme postoji u knjizi Terenca Tao "Hilbert' s fifth problem and related topics", njn obim daleko prevazilazi koncept ovoga rada, ali ako nekoga interesuje link će biti postavljen u referencama. Treba napomenuti da se sva ova istraživanja tiču konačnih grupa, mada nisu ograničena i mogla bi se ispitivati i na beskonačnim dimenzijama.

5.3 Rezime:

Tema: Razmatranje Lijevih struktura bez pretpostavke diferencijabilnosti funkcija. Je li svaka kontinualna grupa automatski Lijeva grupa?

Rešenost: Iako postoji neka mala dvojba, velika većina matematičara smatra da je ovaj problem rešen. Konačno rešenje dato je 1953. godine u vidu Gleson-Jamabeove teoreme. Najjednostavnije rečeno, kroz pomenute radove i istraživanja, došlo se do zaključka da se pretpostavka diferencijabilnosti može izostaviti u slučaju lokalno kompaktnih grupa.

Značaj: Lijeve grupe su veoma bitne strukture, naročito u teorijskoj fizici, a uz njihovu pomoć su rešeni mnogi bitni problemi klasične matematike. Za razumevanje značaja ovoga problema, treba shvatiti vremenski trenutak kada je on nastao. Tada je topologija kao nauka bila u povoju, a i same Lijeve grupe su nastale samo 30 godina ranije. Zbog toga se pitanje njihovog istraživanja i proučavanja nametalo kao jako bitno.

6 Problem 6 - Matematički tretman aksioma fizike. Može li se fizika aksiomatizovati.

6.1 Opšti opis problema

Dejvid Hilbert je bio genije, a svi genijalci su mora se priznati po malo ekscentrični ljudi. Zbog takve svoje prirode često je znao da i ne mareći izrekne neke reči koje će se dugo godina kasnije koristiti i pamtiti kao mudrosti. Jednom takvom prilikom rekao je "Fizika je previše teška da bi se njome bavili fizičari."Ovo ne znači da je on želio da potceni fizičare, naprotiv shvatao je koliko je kompleksan matematički aparat koji su fizičari primorani da koriste. Uvideo je da taj aparat vremenom postaje sve kompleksniji i kompleksniji i da samo znanje vrsnog matematičara može da prati neprestani razvoj fizike. Sa druge strane Hilbert je bio osoba koja je smatrala da svaki problem mora da ima rešenje, samo je potrebno stvoriti dovoljno dobar sistem pomoću kojega bi se do njega došlo. Kao što je pominjano u drugom problemu on je bio jedan od onih ljudi koji su težili tome da se sve aksiomatizuje i dovede na neku odgovarajuću normu. I sam se bavio fizikom, naročito na kraju svoje karijere i kao konzervativnog matematičara nervirao ga je prilično aproksimativan pristup fizičara određenim proračunima. Zbog toga je Hilbert pristupio jednom sasvim logičnom i razumski potrebnom projektu, aksiomatizacije cele fizike.

Ovu zamisao svakako nije lako izvesti ali je Hilbertov plan obuhvatao na početku iznošenje što manje grupe aksioma, koja bi obuhvatila što veći broj fizičkih fenomena. Kasnije bi se aksiomi nadovezivali za nove i specifične teorije. Pod ovim nadovezivali ne misli se samo u kontekstu proučavanja fizike već i čiste matematike. Jer kako i sam Hilbert kaže fizika često zasniva svoje aksiome na eksperimentima ili na onome što je intuitivno tačno; ali u ovome slučaju trebalo bi svaki za svaki aksiom koji se dodaje posebno dokazati da nije u kontradikciji sa već postojećom grupom aksioma. Na ovaj način uvek bi smo dobili nedvosmisleno tačnu i najbolju moguću formulaciju aksioma. A skup aksioma bi uvek mogao da predvidi svaki mogući ishod za bilo koji fizički fenomen.

U originalnoj formulaciji ovoga problema Hilbert je posebno naveo dve oblasti: teoriju verovatnoće i mehaniku. U vezi mehanike poseban naglasak je na strogu teoremu o graničnim procesima koja bi "vodila putod atomističkog gledišta do zakona kretanja kontinuiteta". Za verovatnoću sa druge strane je zahtevao razvoj precizne metode srednjih vrednosti i uopšte statističke fizike. Verovatno i zbog njegovog sopstvenog interesovanja za ove dve teme imamo njihovo posebno naglašavanje. Skoro 20 godina nakon prezentacije problema, nastankon kvantne mehanike ove dve oblasti postaće neraskidivo povezane.

6.2 Rešenost:

Ja smatram da je ovaj problem iako ne strogo matematički jedan od najbitnijih problema sa ove liste. Kao i što je i sam Hilbert smatrao, cilj svakog čoveka koji se bavi naukom treba pre svega da bude otkrivanje i razumevanje temeljnih osnova nauke u globalu, a posebno fizike kao nauke koja opisuje svet oko nas. Matematika je u svemu tome šamo"alat koji treba da služi višem cilju saznanja.Na žalost iz meni nejasnog razloga ovaj problem je dobio možda i najmanje pažnje od svih sa ove liste i najmanji broj matematičara se ozbiljno njime bavilo. To naravno ne znači da za njega nije postojalo interesovanje. Jeste naravno samo je ono bilo nešto manje nego za ostale probleme sa ove liste.

Kao što ste verevatno i mogli pretpostaviti, ovaj problem još uvek nije do kraja rešen i sumnjam da će biti u skorije vreme. Ne zbog svoje težine, već iz razloga što nama prevashodno fale teka temeljna zanja iz fizike. Pod tim mislim pre svega na teoriju kvantne gravitacije, koja je postala bukvalno urbani mit. Sem nje tu se javljaju još neki problemi, jer se fizika kao i matematika konstantno razvija i unapređuje. Otkrivaju se nove teorije, metodi, teoreme i svako novo otkriće treba pažljivo uklopiti u do sada prihvaćeni model. Samim tim ovo je jedan od onih problema koji nam još uvek ne zahtevaju egzaktan odgovor, već nas teraju na konstantno unapređenje i razviće.

Hilbert je sam radio dosta na ovome problemu. 1915. godine Ajnštajn je izdao svoju čuvenu teoriju, malo je poznato da je u tom periodu Hilbert sarađivao dosta sa Ajnštajnom i često su razmenjivali ideje. Čak se veruje da je Hilbert simultano sa Ajnštajnom razradio konačne jednačine polja, nakon što su prvobitne imale sitne nedostatke. Samim tim mehanika nebeskih tela je pretvorena i stopljena u Opštu teoriju relativiteta. Na taj način dobili smo aksiomatizaciju gravitacije i prostor-vremenskog kontinuma. U tom periodu i nakon toga u drugoj deceniji 20. veka, počinje da se kristalizuje ideja teorije koja opisuje mehaniku mikro prostora, takozvana kvantna mehanika. Hilbert zajedno sa saradnicima radi i na projektu aksiomatizacije ove potpuno nove grane fizike. 1933. godine Andrej Kolmogorov je ispunio dio one prvobitne zamisli akiomatizujući teoriju verovatnoće. Posle drugog svetskog rata mnogi su doprineli razviću ove teme. Mozda i najznačajnija je kvantna teorija polja koja predstavlja osnov moderne fizike.

Najveća prepreka svemu ovome predstavlja to što ogromnu većinu fizičkih fenomena predstavljaju 2 teorije. Teorija relativiteta i Kvantna teorija polja. Ove dve teorije nisu usaglašeni i ne čine jednu postojanu logičku celinu. I pored ogromnog truda naučnika širom sveta, kojima je o postalo glavni zadatak, za sada nema uspeha u pronalaženju teorije koja bi objedinila ove 2 teorije; samim tim ovaj problem ostaje otvoren do daljnjeg.

Važno je shvatiti da iako je naglasak na tačnim teorijama, Hilbert nije želio aksiomatizaciju samo onih dokazanih i potvrđenih teorija. On je često govorio da svaku teoriju, pa makar i pogrešnu treba aksiomatizovati jer jedino takav sistematski pristup bi mogao da donese prave rezultate u budućnosti.

6.3 Rezime:

Tema: Kao i za sve ostalo što je radio tako i za fiziku Hilbert je zahtevao strogu i preciznu aksiomatizaciju. Upravo je ovo tema 6. Hilbertovog problema, način i proces dovođenja fizike na temeljne i nepromeljive aksiome. Početna zamisao ticala se posebno graničnih mehaničkih procesa i teorije verovatnoće; ali danas se na ovo obično gleda kao na problem celokupne fizike.

Rešenost: Problem nije rešen, zbog svoga obima i zbog stalnog napretka fizike kao nauke što čini nemoguće ograničiti kontinualan proces razvića u jedan krenutak, kada bi smo rekli "E sad je završeno". Ne, dok god se razvija fizika razvijaće se i ovaj problem, jer sa svakim novim otkrićem i novom teoremom javlja se novi zahtev za matematičkim uređivanjem i uklapanjem u postojeći sistem. Najznačajniji doprinosi su naravno: Opšta teorija relativiteta, Kvantna teorija polja, Kolmogorovljeva aksiomatizacija teorije verovatnoće...

Značaj: Po mom mišljenju jedan od najznačajnijih Hilbertovih problema jer je fizika nauka koja pokušava da objasni svet oko nas. Nju aksiomatizovati je jedan od ključnih zadataka naučnika, jer na taj način otvaramo sebi put ka razumevanju najbitnijih kako naučnih tako i egzistencijalnih pitanja. Ovaj problem je takođe jedan od onih koji konstantno podstiču na rad i zalaganje. Kompletan sistem u fizici se značajno unapredio poštujući zahtev za strogom matematičkom korektnošću. Onoga trenutka kada sva fizika bude stojala na čvrstim aksiomima, to će biti najveće naučno otkriće u istoriji. Tada za čoveka više neće biti tajni prirode.

7 Problem 7 - Iracionalnost i transcedentnost određenih brojeva

7.1 Opšti opis problema

Sredinom 19. veka došlo je do rešavanja jednog vekovnog problema za koji se smatrao da je nerešiv, a to je bila kvadratura kruga. ovaj dokaz je iskočio kao posledica dokaza da π i e nisu algebarski već transcedentalni brojevi. Prvo je Ermit 1873. godine dokazao da je e transcedentan broj, a 1882. Lindeman je koristeći Ermitovu metodu dokazao da je i π transcedentan broj. Ovo su bila jako značajna otkrića u oblasti teorije brojeva i postavljalo se naravno pitanje kuda dalje usmeriti razvoj ovih istraživanja. Upravo u sklopu ovog problema Hilbert je pokušao da sugeriše na čemu treba insistirati u oblasti istraživanja karakteristika brojeva i pojedinih funkcija.

Transcedentni broj se definiše kao onaj broj koji nije rešenje nijedne algebarske jednačine sa racionalnim koeficjentima. Njihovo postojanje predvidio je još Ojler u 17. veku. Ali vrhunac interesovanja za njih bio je sredinom 19. veka, kada je i 1844. dokazano njihovo postojanje. Nakon toga bilo je dosta radova na ovu temu, a nama svakako dva najpoznatija transcedentna broja su π i e. U vezi njih meni je najzanimljivija bila spoznaja Kantorovog dokaza, da u stvari postoji mnogo više transcedentnih nego algebarskih brojeva[19] Još jedna važna njihova karakteristika je da su podskup iracionalnih brojeva.

Ovolika priča o transcedentnim brojevima nam je potrebna jer mislim da je jako mali broj ljudi upoznat sa njima, a sama formulacija pitanja je jednostavna. Posmatrajući pojedine transcedentne funkcije Hilbert je primetio da u koliko im se za argument prosledi algebarska vrednost. Intuitivno svi bi očekivali da transcedentne funkcije kao povratnu vrednost daju transcedentan broj; kakav je recimo primer e na bilo koji algebarski stepen je transcedentan broj. Ovo je dokazao Lindeman 1882. godine. Hilbert je formulisao jedno simbolički slično pitanje. *Da li je izraz α^β za algebarski broj α i iracionalan algebarski eksponent β uvek transcedentan ili bar iracionalan broj?* U geometrijskom smislu, ovo pitanje je ekvivalentno pitanju *Ako je u jednakokrakom trouglu odnos uglova na osnovi i ugla u "vrhu"algebarski ali ne racionalan, tada je odnos baze i krakova uvek transcedentalan?*

7.2 Rešenost:

Nakon nekoliko problema koji nisu zahtjevali konkretan i precizan odgovor, ovaj problem ima jednostavan odgovor. Prezentovano Gelfond-Šnajderovom teoermom odgovor je DA. Odnosno da budemo precizni, u koliko imamo algebarski broj α i iracionalni algebarski broj β, tada je α^β uvek transcedentan broj. Zanimljivo je da je sam Hilbert publici na kongresu u Parizu sugerisao da sumnja da će iko od prisutnih u sali biti živ kada se nađe rešenje za ovaj problem, ali na sreću nije bio u pravu jer je rešenje za konkretan primer $2^{sqrt(2)}$ stiglo već 1930. godine od strane Rusa Rodiona Kuzmina. 1934. godine je izašla pomenuta teorema, koja je ovaj problme rešila u potpunosti.

Gelfond i Šnajder su gotovo u isto vreme razvili svoje metode koji su skoro identični. Pre toga korišćeni su metodi koji su se nadoveziva-

[19]transcedenti brojevi su iste kardinalnosti kao i realni dok je algebarskih prebrojivo mnogo.

li na Ermitovu i Lindmanovu motedu, za dokazivanje nekih određenih slučajeva. Ta metoda se svodila na dokazivanje kontradikcije, time što bi pretpostavili da broj nije transcedentan, a za potvrdu pretpostavke bi se tražilo da postoji celi broj A koji je manji od 1, a veći od nula; što svakako nije tačno. Gelfondov i Šnajderov metod se nije oslanjao na ova iskustva i on je potpuno inovativan. U detalje Gelfondovog i Šnajderovog dokaza nećemo zalaziti jer su i suviše opširni i komplikovani da bi bili prigodni za ovaj rad. Predstavićemo samo skicu Gelfondovog dokaza, Šnajderov dokaz je vrlo sličan. Treba imati na umu da ovo nije detaljan dokaz, izostavljeni su neki bitni delovi, ali koga interesuje da se ozbiljno bavi samo ovom temom link knjige sa svim detaljima biće u referencama.

Gelfond je predstavio treću ekvivalentnu verziju Hilbertovog problema, a njegova teorema glasi ovako. Ako su α i β algebarski brojevi različiti od nule i ako je $\frac{\log(\alpha)}{\log(\beta)}$ iracionalno, tada je i transcedentno. Odmah na početku Gelfondovo polazište razlikuje se od ranijih dokaza transcedentnosti. On je iskoristio Dirihleov princip da pronađe cele brojeve koji nisu nule tako da funkcija

$$F(z) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl} \alpha^{kz} \beta^{lz} = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl} e^{\log(\alpha)kz} e^{\log(\beta)lz}$$

ima osobinu da je $|F^{(t)}(0)|$ dovoljno malo za ograničen broj izvoda. Primetimo da za svako t izvod ove funkcije ima jednostavniju formu.

$$F(z) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl} (k \log(\alpha) + l \log(\beta))^{(t)} e^{\log(\alpha)kz} e^{\log(\beta)lz}$$

Tako da kada uračunamo da je z=0, dobijamo ovu formu:

$$F(0) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl} (k \log(\alpha) + l \log(\beta))^{(t)} = (\log(\beta))^{(t)} \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl} (k \frac{log(\alpha)}{log(\beta)} + l)^{(t)}$$

Koristeći pretpostavku da je $\frac{\log(\alpha)}{\log(\beta)}$ algebarsko Gelfond je shvatio da bi onda za svako t važilo da je

$$(\log(\beta)^{(-t)}) F(0) \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl} (k \frac{log(\alpha)}{log(\beta)} + l)^{(t)}$$

algebarski broj. Svaka od vrednosti $|F(0)^{(t)}|$ je mala da ako nije 0, onda je tolika da vrednost $F(0)^{(t)}(\log(\beta))$ mora biti manja od 0. Tako je Gelfond u stvari našao vrednosti c_{kl}, koje nisu nule tako da funkcija

$$F(z) = \sum_{k=-K}^{K} \sum_{l=-K}^{K} c_{kl} e^{\log(\alpha)kz} e^{\log(\beta)lz}$$

ima osobinu da $F^{(t)}(0) = 0$ za ograničen broj izvoda. Ovde ide komplikovaniji dio Gelfondovog dokaza u koji nećemo zalaziti. On je u tom delu koristio razne metode kako bi dokazao da $|F^{(t)}(n)|$ je jako malo za konačno mnogo celih brojeva i nešto manje izvoda nego sa početka našeg skice. Daljom analizom zaključio je da svaka od vrednosti $|F^{(t)}(n)|$ nije samo mala već da je identički jednaka nuli. Zaključak ovoga poslednjeg koraka je da funkcija ima veći "red nestajanja"(ma šta to značilo) u z=0, od onoga što smo otkrili u samom početku. Ovo nas dovodi do zaključka da određeni sistem jednačina sa jednakim brojem jednačina i nepoznatih ima rešenje.Kako $F(z) \neq 0$, zato što su svi koeficjenti c_{kl} različiti od nule a $e^{\log(\alpha)z}$ i $e^{\log(\beta)z}$ su algebarski nezavisni. Tada iščezava određena Vandermondova matrica iz čega sledi da je $\frac{\log(\alpha)}{\log(\beta)}$ je racionalna vrednost. Ovo je u kontradikciji sa početnim polazištem jer logičkim rečnikom rečeno u koliko iz $A \Rightarrow B$ tada iz $\neg A \Rightarrow \neg B$. Odnosno ako pretpostavimo da su brojevi algebarski i dokažemo da iz toga sledi racionalnost. onda ako nije racionalan nije ni algebarski. Ovde ću naglasak staviti da ovo nije dokaz, niti je verovatno matematički korektno da se ovo na ovaj način navodi. Ipak želio sam samo iz očiglednih razloga da bar dam predstavu i naznačim o čemu se ovde radi svima koji budu čitali.

7.3 Rezime:

Tema: Ovaj problem traži konkretan odgovor na jedno pitanje. Ako je α algebarski broj različit od 0 ili 1 i ako je β iracionalan broj. Dokazati da tada važi da je α^{β} uvek transcedentan ili bar iracionalan?

Rešenost: Problem je prvo parcijalno rešen za neke konkretne primere 1930. godine, korišćenjem Ermitove metode, da bi 4 godine kasnije 2 matematičara Gelfon i Šnajder, nezavisno jedan od drugog razvili metode za rešavanje uopštenog problema.

Značaj: Značaj ovoga problema ogleda se u velikom doprinosu razvoju istraživanja o transcedentnim brojevima, koje je u tom periodu bilo u zamahu. Omogućen je jednostavan način za otkrivanje novih transcedentnih brojeva i stvorena teorema na kojoj će se bazirati skoro sva kasnija istraživanja ove teme.

8 Problem 8 - Rimanova Hipoteza i drugi problemi kompleksnih brojeva

8.1 Opšti opis problema

Osmi Hilbertov problem je mogu slobodno reći najpoznatiji i najbitniji matematički problem, možda čak u istoriji, a u ovom trenutku definitivno. Nakon niza manje-više poznatih problema, ovo je nešto za šta je svak čuo. Skoro svaki čovjek koji se bavi naukom bi trebao čuti za Rimanovu funkciju, a čak i oni koji nisu iz naučne branše, zbog svoje ogromne popularnosti znaju za postojanje neke Rimanove hipoteze. O njenom značaju najbolje govori podatak da je nagrada za njeno dokazivanje milion evra i verovatno večna matematička slava. Zajedno sa još 6 problema čini grupu tzv. milienijumskih problema, za čije se rešavanje dobija pomenuti novac, a samo je jedan od njih 7 rešen. Mogu da pretpostavim da će velika većina ljudi koji možda budu čitali ovaj rad doći samo zbog ovoga problema; a da budem iskren i nama je predstavljalo olakšanje, količina dostupne literatura u vezi ove teme.

Prvo da definišemo Rimanovu zeta funkciju. Ona je definisana na sljedeći način

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

Verovatno predstavlja najpoznatiju i najbitniju funkciju u teoriji brojeva, prevashodno zbog njene veze sa raspodelom prostih brojeva. Ojler je otkrio da se ova funkcija može napisati preko prostih brojeva u obliku

$$\zeta(s)=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

gde su p svi prosti brojevi. Iz ove formulacije lako je zaključiti zašto je funkcija toliko bitna za proste brojeve, a sem ove ima i mnoge druge primene. Najbitnija je svakako ona za raspodelu prostih brojeva, koja direktno zavisi od Rimanove zeta funkcije. Počevši od Ojlerove predstave logaritmovanjem i jednim prilično jednostavnim izvođenjem može se doći do sljedeće formulacije:

$$\ln\zeta(s)=\int_{2}^{\infty}\frac{s\pi(x)}{x(x^s-1)}dx$$

gde $\pi(x)$ predstavlja funkciju raspodele prostih brojeva. Iz ovoga se jasno vidi kakva veza postoji između ove dve funkcije. Ovo je integralna predstava veze ove dve funkcije, ima još načina da se one povežu, ali mi se ova činila najlepše napisanom.

Do sada smo se većinom bavili funkcijama koje za argument uzimaju realne brojeve. Na primer u Rimanovu zeta funkciju možemo uvrstiti broj 2 i dobijamo čuveni Bazelov problem koji je rešio Ojler. $\zeta(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ što po Ojlerovom dokazu konvergita ka $\frac{\pi^2}{6}$ Ali ako na primer uzmemo da je s=-1, tada dobijamo sumu svih prirodnih brojeva što očigledno divergira. Iz ovoga razmatranja, na prvi pogled bi smo zaključili da je ova naša suma konvergentna za svako s veće od 1. Ali zašto se ograničiti samo na realne brojev, potpuno legitimno kao argument za ovu funkiju možemo uzeti bilo koji kompleksan broj. Odnosno za sad, ne baš bilo koji ali sve one kompleksne brojeve čiji je realni dio veći od jedan. Znači ako uzmemo $s=a+bi$, da bi u ovom obliku suma bila konvergent, uslov je $\forall a > 1$. Naravno za kompleksni argument funkcija će nam vratiti kompleksnu vrednost. Dalje treba reći da na ovome domenu na kojem je definisana zeta ova funkcija je holomorfna, odnosno ima izvod u svakoj svojoj tački. Zbog te osobine, metodom analitičkog produženja njen domen možemo proširiti na celokupnu kompleksnu ravan; izuzev tačke s=1 koja se naziva polom ili singularitetom funkcije. Sad nam se čini da je možemo za vrednosti s čiji je realni deo manji od 1 definisati funkciju na beskonačno mnogo načina, ipak ako želimo da zadržimo osobinu da imamo izvod u svakoj tački kompleksne ravni onda imamo samo jedan način i kreiramo tačno određeno simetričnu funkciju u odnosu na pravu kroz tačku $s = \frac{1}{2} + bi$ paralelnu imaginarnoj osi. Na ovaj način definisali smo funkciju i za one komplekse brojeve za koje očigledno ova suma sa početka ne važi. Za njih važi jedan potpuno drugi izraz koji izgleda veoma komplikovano i koji nama u našem radu u suštini nije potreban. Poenta je da u koliko znamo kako izgleda funkcija za ravan s=a+ib gde je $a > 1$, onda znamo kako izgleda i za ovaj dio kompleksne ravni za koju oćemo da primenimo metodu analitičkog produženja; a simetrična je za pravu paralelnu imaginarnoj osi kroz $Re\{s\} = \frac{1}{2}$. Sad logično se pitanje postavlja u koju se tačku slika $s = -1$. Zanimljivo, ali potpuno neočekivana vrednost $\zeta(-1) = \frac{-1}{12}$. Ova brojka je potpuno, nelogična i sumnjam da je iko očekivao da kao sumu svih prirodnih brojeva dobije ovaj broj. Znajući ovo mogli bi ste čak u društvu da se kladite da ćete im dokazati da je suma 1+2+3+4...+n jednaka $\frac{-1}{12}$, zaista neverovatno. Ova suma naravno ne važi za prvi gore navedeni oblik Rimanove zeta funkcije, on važi samo za $Re\{s\} > 1$, za onaj dio koji smo dobili produženjem(pa tako i za -1), važi druga eksplicitna formula za koju možemo dobiti traženu vrednost. Upotrebom te formule možemo pronaći vrednosti i za svaku drugu vrednost. Važna karakteristika ove funkcije je da dobijamo 0 za svako s čiji je realni dio jednak parnom negativnom broju. Na primer 0 ćemo dobiti za 2,4,8,10...2n. Ove nule se nazivaju trivijalne nule Rimanove zeta funkcije. U matematici se trivijalnim naziva nešto što je jednostavno i što se podrazumeva, iako je ovo samo po sebi jako ozbiljno matematičko gradivo. Trivijalne nule nisu u ovom slučaju predmet našeg interesovanja, bitno je znati samo da one postoje za svaku negatinvu parnu vrednost. Ono što nas interesuje su svakako netrivijalne nule ove funkcije. Riman je dokazao da se sve nule nalaze u kritičnom pojasu kompleksne ravni koje ograničavaju sa jedne strane imaginarna osa, a sa druge strane linija paralelna imaginarnoj osi koja prolazi kroz s=1. Takođe kao što smo rekli nule su simetrično raspoređene sa obe strane prave prave $s = \frac{1}{2} + bi$ za bilo koje b. Sada dolazimo do naše konačne formulacije hipoteze.**Pronaći dokaz da se sve netrivijalne nule Rimanove zeta funkcije ne nalaze samo u kritičnoj oblasti već tačno na pravoj $s = \frac{1}{2} + bi$ pri čemu je b bilo koji relan broj, a i je imaginarna jedinica?** Dugo vremena se mislilo da je Riman postavio ovo pitanje intuitivno, odnosno bez nekog dokaya da je tako. Tek kasnije u njegovim radovima pronađeno je da je on ipak proračunao prve

3 nule ove funkcije i uvideo da su sve na pomenutoj pravoj. Verovatno je tako došao na ideju. Čak postoji legenda da se njegovi rukopisi otvaraju sami uvek na stranici gde je Rimanova hipoteza. Ovaj problem je postao toliko poznat da je deo mita. Naravno niko ne traži ovaj rezultat samo zbog njega samog, naprotiv, kao što smo već pokazali ova funkcija je duboko povezana sa raspodelom prostih brojeva. Od vrednosti njenog realnog dela, za svaku nulu, zavisi kolike oscilacije u poziciji očekivanih prostih brojeva. Takođe ima jaku povezanost sa funkcijom raspodele prostih brojeva koja govori koliko takvih brojeva ima ispod broj x.

8.2 Rešenost:

Kao što smo već napisali, ovo je najbitniji nerešeni problem matematičkog sveta. Nakon rešavanja poslednje Fermaove teoreme interesovanje ubedljivo najbitniji problem čiste matematike je postalo Rimanova hipoteza. Zanimljiva stvar jeste da je Hilbert pogrešio u svojoj proceni i to prilično, na jednom svom predavanju on je tvrdio da će možda doživeti da vidi rešenje Rimanove hipoteze, da će mladi ljudi iz publike doživeti da vide rešenje Fermaove posljednje teoreme, a da niko pristutan neće doživeti rešenje 7. problema transcedentnosti. Desilo se sve suprotno, vrlo brzo je rešen problem transcedentnosti, Fermaova teorema je krajem veka rešena, a ovaj problem traje i danas i pored ogromnog interesovanja. Glupo bi bilo da mi pričamo o nekim konkretnim postupcima i pristupima dokazivanju; tako kompleksnu matematiku ne razume ni veliki broj sjajnih matematičara. Mi ćemo pokušati samo da sistematizujemo dosadašnje doprinose u rešavanju ovoga problema.

Danas se u svetu u globalu veruje da je Rimanova hipoteza tačna. Mnogo naucnika je pisalo cele knjige sa ovakvom pretpostavkom i može se reći da bi to bila ogromna katastrofa kada bi se ispostavilo da nije tako. Matematika na žalost ne priznaje verovanje, već samo egzaktan dokaz koji mi još uvek nemamo. Kroz istoriju bilo je mnoštvo pokušaja za rešavanje ovoga problema, kako poznatih matematičara tako i amatera. Naročito od kad je ponuđena nagrada od milion evra za njeno rešavanje. Bukvalno je dovoljno pronaći samo jednu nulu, koja se nalazi u kritičnojo oblasti, ali ne na liniji da cela hipoteza padne u vodu i da se dobije ta famozna nagrada. Prvo što je matematičarima palo na pamet jeste da pronađu konkretne nule i na da provere da li bi neka od njih možda imala realni dio različit od $\frac{1}{2}$. Sam Riman je našao prve 3 nule, nakon njega su ih ručno, raznim metodama tražili Gram, Baklund i mnogi drugi. Sve do Alana Tjuringa, kreatora prve komjpjuterizovane mašine, čija je jedna od namjena bila da traži nule Rimanove zeta funkcije. On ih je pronašao nešto oko 1000, a ta potraga je nastavljena i danas. Danas pomoću moćnih kompjutera, imamo dokaz da čak 10^{24} nula zadovoljva traženi uslov odnosno da je njihov realni dio jednak $\frac{1}{2}$. Kada pogledamo koliki je to ogroman broj, shvatamo zašto matematičari gaje uverenje da je hipoteza tačna. Naravno to nije dokaz, dovoljna je samo jedan od beskonačno mnogo nula da "iskoči"i u problemu smo.

Što se tiče konkretnog napretka, on je stigao 1915. godine, kada je Hardi dokazao da se beskonačno mnogo nula nalazi upravo na kritičnoj liniji. Razvijene se mnoge metode za računanje broja netrivijalnih nula na kritičkoj liniji kao i njihovu gustinu.Tu treba posebno napomenuti našeg matematičara Aleksandra Ivića koji je 1985. godine, dodatno unapredio Borov i Landauov dokaz da sve netrivijalne nule moraju ležati na jako maloj udaljenosti od kritične linije. Postoji i dokaz da u oblasti vrlo blizu prave paralelne imaginarnoj osi kroz 1, ne može biti nula. 1986. godine Konri je dokazao da se na kritičnoj liniji mora naći najmanje $\frac{2}{5}$ nula u kritičnoj oblasti. U međuvremenu i danas bilo je dosta neuspelih pokušaja za dokazivanje ove hipoteze. U zadnje vreme nakon rešavanja Fermaove posljednje teoreme ti pokušaji su postali naročito česti. Posljednji u nizu dao je poznati matematičar Majkl Atija 2018. godine. Njegov dokaz još uvek nije ni priznat ni opovrgnut. Mada kao što je on sam rekao, zbog ogromnog broja neuspelih pokušaja, mnogi ljudi ne veruju u nove dokaze Rimanove hipoteze jer se jednostavno pitaju da li je moguće nešto novo smisliti, što neko već nije probao.

8.3 Rezime:

Tema: Dokazati da se sve nule Rimanove zeta funkcije nalaze na kritičkoj liniji $s = \frac{1}{2} + bi$. Nakon toga dokaza trebalo bi ispitati i razraditi teoriju raspodele prostih brojeva. RImanova zeta funkcija ima velike veze sa funkcijom raspodele prostih brojeva i određuje oscilaciju prostih brojeva u odnosu na neku predviđenu vrednost.

Rešenost: Hipoteza nije rešena i predstavlja sigurno najpoznatiji nerešeni problem u matematici. Nezvanično matematičari smatraju da je tačna jer se numerički dobijeni rezultati poklapaju sa pretpostavkom. Bilo je mnogo pokušaja za rešavanje, posljednji u nizu se desio 2018. godine i dao ga je Majkl Atija. Doprinos je dao i naš matematičar, član SANU Aleksandar Rašković, koji je bio i jedan od retkih matematičara koji nisu uvereni u tačnost ove hipoteze.

Značaj: Najznačajniji nerešeni problem čiste matematile. Njenim rešenjem dobili bi smo mnoge odgovore u vezi raspodele prostih brojeva i pronikli u se njihove tajne. Sem toga ima upliv u skoro svim naukama: geodeziji, teorijskoj fizici i mnogim drugim naukama. Mnoge teoreme u vezi teorije brojeva su napisane pod pretpostavkom da je ona tačna, njeno opovrgavanje bi srušilo čitam jedan matematički svet.

9 Problem 9 - Opšti dokaz teoreme reciprociteta za bilo koje polje brojeva

9.1 Opšti opis problema

Teorija brojeva predstavlja najstariju i najproučavaniju granu matematike. Ovom temom su se bavili mnogi matematičari još od davnih vremena, ali kao i za mnoge druge stvari, Karl Fridrih Gaus je dao najveći doprinos i zbog toga ga možemo smatrati ocem moderne teorije brojeva. Od njegovog kvadratnog zakona reciprociteta je sve i počelo. Posle njega reciprocitetom se bavio i sam Hilbert, pa je stoga uvrstio ovo pitanje kao jedno od svoja 23 problema. Krajem 18. i početkom 19. veka zakon reciprociteta se zasnivao na uopštenju simbola stepenog ostatka (p/q), odnosno generalizacije kvadratnog zakona reciprociteta. Hilbert je dalje nastavio da razvija ovu oblast i reformulisao je ovaj zakon da bi na kraju i sam tražio da se pronađe njegova najopštija forma. Tako da bi ključno pitanje ovoga devetog Hilbertovog problema bilo: **Naći opšti dokaz teoreme reciprociteta za proizvoljno polje brojeva.**

9.2 Rešenost problema:

Ovaj problem je jedan od onih Hilbertovih problema, koji nisu do kraja rešeni ali su u velikoj meri odgonetnuti. Odgovor na ovaj problem dao je Emil Artin tridesetih godina prošlog veka. On je definisao svoj Artinov zakon reciprociteta, koji radi sa Abelovim proširenjem, algebarskog polja brojeva. Kasnije je ovaj rad inspirisao Njemca Helmuta Hasea i Japanca Tedžija Tagakija da kreiraju Teoriju polja klasa koja se smatra trenutno najkompletnijom teorijom koja se bavi ovom tematikom. Ne abelovska generalizacija ovoga problema, još uvek ostaje misterija i nešto što nije rešeno. S obzirom na kompleksnost Artinovog zakona mi ćemo se samo upoznati sa osnovnim kvadratnim zakonom reciprociteta od kojega je dalje sve počelo.

Opšte je poznato da su dva broja kongurentna po modulu n, ako je njihova razlika deljiva sa datim brojem n. U oznaci $a \equiv b$ (mod n). Neka je n pozitivan cijeli broj i (a,n)=1. Broj a nazivamo kvadratni ostatak po modulu n ako kongruencija $x^2 \equiv a$ (mod n) ima rešenje; a u koliko nema onda ga nazivamo neostatak. Legrendeov simbol u oznaci $(\frac{a}{p})$ uzima vrednost 1, ako je a kvadratni ostatak po modulu p, -1 ako je neostatak po istom modulu, a 0 ako je a deljiv sa p. Njega možemo izračunati upotrebom sljedeće formule

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (mod\, p)$$

Za Legrendeov simbol važe i sledeća osobina:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

Kvadratni zakon reciprociteta onda glasi. Neka su p i q dva različita neparna prosta broja. Tada imamo da važi:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

Iz ovoga su nastali svi kasniji zakoni reciprociteta, od kubnog preko Hilbertove reprezentacije preko proizvoda, do Artinovog zakona i mnogih drugih.

9.3 Rezime:

Tema: Pronaći i dokazati teoremu reciprociteta za bilo koje polje brojeva

Rešenost: Problem je rešen podrazumevajući abelovsku ekstenziju prostora prirodnih brojeva. Generalizovana ne-abelovska solucija još uvek nije pronađena.

Značaj: Teorija brojeva je sama po sebi jako bitna, a ovo je jedan od ključnih njenih problema. Ima veliki značaj u kasnijoj teoriji polj klasa, kao i u nekoj verziji Hilbertovog programa. Kako god, ovo je problem koji je značajno usmerio razvoj ove oblasti u decenijama nakon Kongresa.

10 Problem 10 - Opšte rešenje Diofantove jednačine

10.1 Opšti opis problema:

Pre samog izlaganja problema na Kongresu 1900. godine Hilbert je rekao sljedeću rečenicu: "Ponekad se dogodine da problem rešavamo pod nedovoljnim pretpostavama ili da tražimo rešenje iz pogrešne perspektive i iz toga razloga ne uspemo. Tada se nameće sledeće pitanje dokazati da je problem nemoguće rešiti pod datim okolnostima ili iz posmatrane perspektive."Ova rečenica bi se mogla primeniti upravo na ovaj, kao i na neke druge Hilbertove probleme. Kratko rečeno, nekada ne treba tragati za rešenjem nekoga problema, već za dokazom da je to rešenje pod datim pretpostavkama nemoguće izvesti. Tada ako nam je od interesa možemo promeniti pretpostavke i uslove, zavisno od cilja do kojeg hoćemo da dođemo. Formulacija 10. Hilbertovog problema je veoma jednostavna. **Za datu diofantsku jednačinu sa bilo kojim brojem nepoznatih veličina i sa racionalnim celobrojnim koeficjentima: Izmisliti postupak kojim se može odrediti, koristeći konačan broj operacija, da li data jednačina ima ili nema rešenje u skupu celih brojeva.** U ovoj formulaciji nameno sam izbegao reč "algoritam"jer ona nije bila poznata u doba Hilberta. Tek Godelovim definisanjem rekurzivnih funkcija ova reč je ušla u upotrebu. Istraživanjem se došlo do zaključka da se algoritmima određuju uvek rekurzivne odnosno primitivno rekurzivne funkcije. Samim tim Čurč je postavio poznatu hipotezu: Klasa rekurzivnih funkcija je jednaka klasi intuitivno izračunljivih funkcij. Ovim naše pitanje dobija jednu novu formulaciju. Dokazati da li postoji rekurzivna funkcija koja rešava problem pomenute diofantovske jednačine. U originalnoj verziji traži se rešenje za skup celih brojeva, ali ovo je potpuno ekvivalentno i da se traži u skupu prirodnih brojeva.

Pitanja koja se nameću u ovome problemu nisu samo striktno vezana za njega, već i za celokupni postupak rešavanja neke jednačine. Tu se kao 2 glavna svakako nameću postupak za nalaženje korena jednačine i postupak za dokaz postojanje korena jednačine. Prvi je prilično trivijalan, uvek možemo navesti n-torku prirodnih brojeva $(d_1, d_2, d_3 ... d_n)$ i proveriti da li je ona rešenje $P(d_1, d_2, d_3 ... d_n)$ rešenje date jednačine. Problem je kad jednačina nema rešenje. Tada bi ovaj postupak postao beskonačno vrćenje u krug. Upravo to i pita Hilbert ovim problemom. Do kojeg d_p treba ići da bi smo mogli reći da problem nema rešenje.

10.2 Rešenost problema:

Kao i za većinu problema koje ovde navodimo, tako i ovaj je zahtevao duži vremenski period za dolazak do njegovog konačnog rešenja. Izgleda da su na osnovu nekog svog iskustva i intuicije naučnici već mnogo prije nego što je stvoren dokaz pretpostavljali da traženi algoritam ne postoji. U jednom od svojih radova Emil Post je izjavio da 10. Hilbertov problem "moli za potvrdu nedokazivnosti."Kasnije je taj dokaz i došao, u vidu kombinovanih radova Martina Davisa, Jurija Matijaseviča, Hilarija Patnama i Julije Robinson. Krajnju verziju dokaza dao je Matijasevič 1970. godine, ipak on je u kasnijim intervjuima često naglašavao da je najveći doprinos tome dala Julija Robinson. Ovaj dokaz je kao zaključak imao, da ne postoji algoritam, takav da može odrediti da li bilo koja Diofantova jednačina ima rešenje. J. Robinson i M.Davis su u svojim radovima dokazali su da se ovaj problem svodi na to da se dokaže da je graf eksponencijalne funkcije $z = x^y$ diofantovski skup. Odnosno da postoji diofantovska jednačina čija rešenja rastu eksponencijalnom brzinom. Matijasevič je oslanjajući se na prijašnje radove pomenutih autora kao i na rad ruskog matematičara Nikolaja Vorobljeva o Fibonačijevom nizu dokazao da ovakav algoritam ne postoji.

10.3 Rezime:

Tema: Pronaći algoritam koji određuje da li je neka diofantovska jednačina rešiva ili ne, u skupu celih brojeva.

Rešenost: Problem je rešen. Konačno rešenje dao je Matijasevič 1970. godine; ali su mnogo doprineli Julija Robinskon, Martin Davis i Hilarij Patnam. Dokazano je da takav algoritam jednostavno ne postoji.

Značaj: Ovaj problem imao je velikog uticaja na dve bitne grane matematike, na logiku i na teoriju brojeva. Mnoge značajne primene je imala u ispitivanju pojedinih karakteristika brojeva. U istraživanju Fermaove posljednje teoreme, Rimanove hipoteze, Teoreme četiri boje i mnogih drugih. Ovo rešenje imalo je dosta uticaja i na na kasnija istraživanja u okviru pominjane ZF teorije.

11 Problem 11 - Kvadratna forma proizvoljnog celobrojnog algebarskog polja

11.1 Opšti opis problema

Problem kvadratnih formi je star skoro koliko i sama matematika. Još je Pitagora pre nove ere definisao takozvane Pitagorine trojke, koje su imale osobinu da su bile pozitivni brojevi takvi da važi da je $a^2 + b^2 = c^2$. Posle njega indijski matematičar Brahmagupta je dao primer jednačine $x^2 - ny^2 = c$, i dao primer za njeno rešavanje. Kasnije će ova jednačina postati poznata kao Pelova jednačina za slučaj da je c=1. U evropi su u modernom vremenu, ovakve specifične slučajeve kvadratnih gormi izučavali Brounker, Ojler, Lagranž i Gaus. U svojoj knjizi iz 1801. godine, Gaus je posebnu pažnju obratio na kvadratnu binarnu formu što je u stvari kvadratni homogen polinom sa dve promenljive oblika $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Prvo treba definisati kvadratnu formu. Stroga definicija kvadratne forme bi bila da je to funkcija q nad poljem K koja slika $q : V \to K$ tako da važi $q(av) = a^2 * q(v)$ za svako $a \epsilon K$ i $v \epsilon V$. I takođe funkcija $g(u + v) - q(u) - g(v)$ je bilinearna.[20] Razumljivije rečeno to je polinom u kojem je najveći stepen svih promenljivih 2, a koeficnjetni su iz nekog određenog polja K. Kvadratnu formu ne treba poistovjećivati sa kvadratnom jednačinom jer kvadratna jednačina uvek ima samo jednu promenljivu, kvadratna forma je ipak mnogo uopšteniji koncept. Sagledavši sva dotadašnja istraživanja i sve radove koji su se bavili konkretnim slučajevima kvadratnih formi Hilbert je postavio zadatak pred matematičare budućih decenija.**Kreirati teoriju kvadratnih formi sa bilo kojim brojem promenljivih nad bilo kojim algebarskim poljem brojeva.** Kaplanski je objasnio da se ovaj problem na kraju svodi na klasifikaciju kvadratnih formi, nad algebarskim poljima brojeva.

11.2 Rešenost problema

Kažemo da određena kvadratna forma prezentuje neki broj, ako zamenom brojeva na mesta promenljivih dobijemo broj. Gaus je otkrio

[20] kombinovanje elemenata 2 vektorska prostora da se stvori element trećeg vektorskog prostora.

da su pojedine kvadratne forme ekvivalentne i koristio je ovaj dokaz u mnogim svojim radovima. Lagranž je pokaza da se svaki broj može predstaviti kao zbir četiri kvadrata celih brojeva, Gaus je uz pomoć svoje teorije o ekvivalenciji dokazao ovo tvrđenje. Kvadratnom formom oblika $x^2 + y^2 + z^2 + k^2$ može da se predstavi bilo koji prirodni broj. Kako je i sami Hilbert pominjao Minkovsko je kreirao sličnu teoriju samo sa razlomcima kao koeficjentima. Hilbertov jedanesti problem traga za sličnom teorijom ovoj koju je dao Gaus. Tražimo teoriju koja bi objašnjavala jesu li dve kvadratne forme ekvivalentne, ali u slučaju gde koeficjenti mogu biti algebarski brojeva, odnosno u uopštenom smislu. Ovo je donekle ostvario Helmut Hase koji je koristeći svoj Haseov princip donekle rešio ovaj problem. Haseov princip nam govori da neki generalni rezultat o racionalnim brojevima možemo potvrditi ako i samo ako je taj rezultat tačan u manjem sistemu p-adnih brojeva[21]. Ova teorema je poznata kao Hase-Minkovski teorema i ona kaže sledeće: Dve kvadratne forme su ekvivalentne akko su lokalno ekvivalentne za svaku tačku polja. Ovim se problem uopštene ekvivalencije sve na rešavanje problema lokalne ekvivalencije nekoga polja.

11.3 Rezime

Tema: Naći teoremu koja određuje da li su dve kvadratne forme ekvivalentne u bilo kom algebarskom sistemu brojeva.

Rešenost: Problem je parcijalno rešen, rešenje je kombinovani rad Minkovskog i Hasea; mada je veći i uopšteniji Haseov doprinos. Tim dokazom problem je doveden sa uopštenog ispitivanja ekvivalencije, na ispitivanje lokalne ekvivalencije.

Značaj: Ovaj rezulata ima značajnu primenu u istraživanju različitih tipova jednačina, a sami Haseov princip je jedan od najznačajnijih principa u aritmetičkoj geometriji. Kvadratne forme su vrlo bitne u raznim oblastima matematike, pa tako indirektno ovaj problem pogađa: teoriju brojeva, lineranu algebru, teoriju grupa, diferencijalnu geometriju i mnoge druge.

12 Problem 12 - Kronekerova teorema konstrukcije holomorfne funkcije

12.1 Opšti opis problema:

Iako zbog nedostatka vremena ovaj problem nije bio jedan od deset prezentovanih na samom kongresu, Hilbert je ovome pitanju davao popriličan značaj. "Ovaj problem smatram jednim od najdubljih i najdalekosežnijih u teoriji brojeva i funkcija.", ovo su bile njegove reči a samo

[21] p-adic system

izgalanje u vezi ovoga problema ima vrlo raznovrsna i nejasna tumačenja. Kroneker-Weberova teorema se bavi ekstenzijom racionalnog polja brojeva Q. Odnosno govori nam da je svaka konačna abelovska ekstenzija racionalnih brojeva, u stvari podpolje ciklotomskog[22] polja. Ciklotomsko polje je polje je u stvari ekstenzija polja racionalnih brojeva, prošitujući ga primitivnim korenima jedinstva.[23] Ovaj pojam izgleda zbunjujuće ali to je u stvari ništa drugo, do kompleksnog broja x, za koje važi $x^n = 1$ gde je n pozitivan celi broj, a primitivan znači da ne postoji neko k manje od n za koje važi $x^k = 1$. Kao što se vidi iz priloženog Kroneker-Weberova teorema se bavi isključivo proširenjem polja racionalnih brojeva. Hilbert kao i u mnogim od svojih problema traži uopštenje. Tako da bi neka najjednostavnija formulacija ovoga problema bila pronaći generalizaciju Kroneker-Weberove teoreme, na bilo koje polje. U koliko imamo dato neko proizvoljno brojno polje K, Hilbert pretpostavlja da je moguće naći neku analitičku funkciju, koja ako za argument uzme algebarske brojeve, generiše sve abelovske ekstenzije polja K. Kao što sva abelovska proširenja od Q, mogu biti generisana korenima jedinstva ili kao što proširenja imaginarnih kvadratnih polja mogu da se generišu različitim modularnim i eliptičkim funkcijama, tako nama u ovom slučaju trebaju neki ekvivalenti tome za određeno polje K.

12.2 Rešenost problema

Ovaj problem nije rešen do dana današnjeg. U odnosu na ono znanje koje je postojalo kada ga je Hilbert predstavio napravljen je određeni napredak ali ništa što bi bilo i blizu opšteg rešenja ovoga problema.Kao što je pomenuto Kronekerov rad je uspio da dođe do odgovora, ali samo za imaginarna kvadratna polja bazirajući se na modularnim i eliptičkim funkcijama. Kasnije je ova dodatno poopšteno na CM-polja, od strane Japanaca Šimure i Tanijame. Mnogi Hilbertovi studenti su radili na ovom problemu, kao i Daniel Bauer i pominjani Helmut Hase. Na žalost i pored raznih uspeha na ovome polju i velikog razvoja teorije numeričkih polja kroz 20. vek, ovo pitanje i dalje ostaje otvoreno.

12.3 Rezime

Tema: Proširenje Kroneker-Weberove teoreme na bilo koje brojno polje. Pronaći analitičku funkciju pomoću koje bi smo mogli generisati sva abelovska proširenja polja K.

Rešenost: Problem nije rešen i pored brojnim pokušaja. Kada su u pitanju imaginarna kvadratna polja pronađene su eliptičke i modularne funkcije. Japanski matematičar Šimura je ovo proširio na CM-polje i to je krajnji domet u rešavanju ovoga problema.

[22]cyclotomic field - prevod je proizvoljan, egzaktan nisam uspio da pronađem u literaturi

[23]primitive root of unity

Značaj: Ovo je jako značajno pitanje za teoriju brojeva, algebru i teoriju specijalnih funkcija koje Hilbert naziva "tri fundamentalne grane matematike". Kao pitanje koje se bavi poljima brojeva, koja su u tadašnje vreme bila srž matematičkog istraživanja ovaj problem je trebao da napravi jedan apsolutni sklad u toj oblasti. Ovo je verovatno i bila ideja, kao u ostalom i razvoj celokupne jedne grane matematičkog istraćivanja.

13 Hilbertov 13. problem : Nemogućnost rešenja opšte jednačine sedmog stepena pomoću fukcija sa samo dva argumenta

13.1 Uvod

Hilbert je kod ovog problema razmatrao sedmostepenu jednačinu $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ i pitao da li rešenje, x ,smatrano kao funkcija od tri promenljive a, b i c može biti kompozicija konačnog broja neprekidnih funkcija sa samo dva argumenta.

Verzija problema za neprekidne funkcije je rešena 1957. kada je Vladimir Arnold dokazao Kolmogorov-Arnold-ovu teoriju reprezentacije, ali verzija problema za algebarsku funkciju ostaje nerešena.

13.2 Razvoj pitanja

Hilbert je originalno postavio pitanje za algebarske funkcije. Hilbert je u kasnijoj verziji pitao i da li postoji rešenje u klasi neprekidnih funkcija. Ta generalizacija na neprekidne funkcije povlači sledeće pitanje : da li svaka neprekidna funkcija od tri promenljive može biti izražena kao kompozicija od konačno mnogo funkcija sa dve promenljive?

Hilbert je pretpostavio da je odgovor negativan i rekao :

"Verovatno je da je koren jednačine sedmog stepena funkcija njenih koeficijenata koji [...] ne mogu biti konstruisani sa konačnim brojem umetanja funckija od dva argumenta. Da bi se ovo dokazalo, potrebno je dokazati da jednačina sedmog stepena $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ ne može biti rešena uz pomoć bilo kojih neprekidnih funkcija od samo dva argumenta."

Bilo je potrebno preko 50 godina da bude nekakvog napredovanja za ovaj problem. Dok nije 1954. Vitushkin pronašao rešenje za smer koji je Hilbert očekivao : ako je $n/q > n'/q'$ onda postoje funkcije n promenljivih sve q-tog stepena neprekidnih izvoda koje ne mogu biti zapisane kao superpozicija funkcija n' promenljivih koje su sve q'-tog reda neprekidnih izvoda. Posebno, postoje neprekidno diferencijabilne funkcije sa tri promenljive koje mogu biti zapisane kao superpozicija neprekidnih diferencijabilnih funkcija dve promenljive.

Pozitivan odgovor na pitanje dao je Vladimir Arnold 1957.godine, koji je imao samo 19 godina i bio student Andrez Kolmogorov-a. Kolmogorov je godinu dana ranije pokazao da bilo koja funkcija sa nekoliko promenljivih može biti konstruisana sa konačnim brojem funkcija od tri argumenta. Arnold je potom nastavio njegov rad i pokazao da su zapravo potrebne samo funkcije od dve promenljive , i tako odgovorio na Hilbertovo pitanje u vezi klase neprekidnih funkcija. Arnold se kasnije vratio i na algebarsku stranu problema,ujedinjen sa Goro Shimur-om 1976.

Odgovor je dat kroz sledeću teoremu :

Teorema 1 (Kolmogorova superpozicija) Za fiksirano polje $n \geq 2$, postoje $n(2n+1)$ mape $\psi^{pq} \in C([0,1])$ takve da svaka mapa $f \in C([0,1]^n)$ može biti zapisana kao :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q(\phi^q(x))$$

gde je

$$\phi^q(x_1, ..., x_n) = \sum_{p=1}^{n} \psi^{pq}(x_p)$$

i $g_q \in C(\mathbb{R})$ su mape koje zavise od f.

Problem upravo kaže da svaka neprekidna funkcija od dve ili više promenljivih može biti zapisana kao superpozicija neprekidnih funkcija samo jedne promenljive uz samo jednu funkciju dve promenljive. Ali Kolmogorovo rešenje nije kompletno rešenje Hilbertovog 13. problema. Hilbertov iskaz se odnosi na funkcije (kao što je koren funkcije jednake onoj sedmog stepena) sa tri realne, ili možda još prirodnije, kompleksne, promenljive. Kolmogorova teorema se bavi samo funkcijama kompaktnog kuba, te su promenljive ograničene na zatvoren interval.

13.3 Rešavanje

Problem je prvobitno predstavljen kroz nomografiju i u parcijalnoj nomografskoj konstrukciji što podrazumeva proces u kome se funkcija sa više promenljivih predstavlja kroz funkcije od dve promenljive.

Ovako velika klasa funkcija od tri ili više promenljivih može se predstaviti samim tim bez upotrebe promenljivih elemenata, odnosno generisanjem svih onih koje mogu biti prvo formirane od funkcije sa dva argumenta, a svaki od ovih argumenata izjednačiti sa funkcijom od dva argumenta,koja će svaki od tih argumenata zameniti funkcijom dva argumenta i tako dalje,smatrajći prihvatljivim bilo koji konačan broj umetanja funkcija dva argumenta.

Na ovaj način svaka racionalna funkcija bilo kog broja argumenata pripada ovoj klasi funkcija koju kontrolišu nomografske tabele ; jer se mogu generisati procesima sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja i svaki od tih procesa proizvodi funkciju samo dva argumenta. Lako se vidi da koreni svih jednačina koji su radikali , razrešivi u prirodnoj sferi racionalnosti, pripadaju ovoj klasi funkcija; jer je ovde ekstrakcija korenova spojena sa četiri aritmetičke operacije i to zaista predstavlja funkciju samo jednog argumenta. Tako i opšte jednačine 5. i 6. stepena su rešive odgovarajućim monografskim tabelama; jer se pomoću Tachirnhausenovih transformacija (kojima je potrebna samo ekstrakcija korena) mogu smanjiti do oblika u kojem koeficijenti zavise samo od dva parametra. Sada je verovatno da je koren jednačine sedmog stepena funkcija njegovih koeficijenata koja ne pripada ovoj klasi funkcija sposobnih za nomografsku konstrukciju, tj. da se ne može konstruisati ograničenim brojem umetanja funkcija dva argumenta.

Dokazivanje : Da bismo ovo dokazali potrebno je da jednačina sedmog stepena:
$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$
nije rešiva uz pomoć bilo koje neprekidne funkcije od samo dva argumenta. (strogim postupkom je provereno da postoje analitičke funkcije od tri argumenta a,b,c koje se ne mogu dobiti konačnim lancem funkcija od samo dva argumenta. Koristeći pomoćne pokretne elemente, nomografija uspeva da izgradi funkcije sa više od dva argumenta, kao što je D'Ocagne nedavno dokazao u slučaju jednačine sedmog stepena, ali ne i sa samo dva argumenta.) [57]

14 Hilbertov 14. problem : Dokaz konačnosti određenih sistema funkcija

14.1 Uvod

Problem podrazumeva nalaženje konačnog sistema relativno celobrojnih funkcija pomoću kojih se može racionalno i celobrojno predstaviti svaka relativno celobrojna funkcija.

Ovo nam govori : pretpostaviti da je k polje i neka je K podpolje pola racionalnih funkcija n promenljivih,

$k(x_1, ..., x_n)$ preko k.

Uzeti onda k-algebru R definisanu kao presek

$R := K \cap k[x_1, ..., x_n]$.

Hilbert je pretpostavio da je takva algebra konačno generisana preko k.

Hilbertova pretpostavka je pokazana za neke posebne slučajeve i za neke klase prstenova (konkretnije,pretpostavka je dokazana bezuslovno za n=1 i n=2 od strane Zariskog 1954.) i potom je 1959. Masazoshi Nagata pronašao kontra-primer za Hilbertovu pretpostavku. Nagatin kontraprimer je odgovarajuće izgrađen prsten invarijanti za dejstvo linearne algearske grupe.

14.2 Razvoj

Problem je originalno bio iz algebarske invarijantne teorije. Tu je prsten R dat kao prsten polinomnih nepromenljivih linearne algebarske grupe preko polja k koji algebarski deluje na polinomni prsten $k[x_1, ..., x_n]$ (ili generalnije, konačno generisana algebarski definisana preko polja). U ovoj situaciji polje K je polje racionalnih funkcija (kvocijenata ili polinominala) za promenljive x_i koje su nepromenljive pod datim delovanjem algebarske grupe, prsten R je prsten polinomnih funkcija koje su nepromenljive pod delovanjem.

Tipičan primer devetnaestog veka je bio učenje(posebno kod Cayley-a, Sylvester-a, Clebsh-a, Paul Gordon-a i Hilberta) o invarijantnosti binarnih formi sa dve promenljive sa prirodnim delovanjem na specijalnu linearnu grupu $SL_2(k)$ na sebi.

Hilbert je dokazao konačnu generaciju nepromenljivih prstenova za slučaj polja kompleksnih brojeva za neke klasične polu jednostavne lažne grupe (konkretnije generalnu linearnu grupu kompleksnih brojeva) i specifičan linearan uticaj na polinomne prstenove. Ovo je kasnije dopunio Hermann Weyl do klase svih polu-jednostavnih lažnih grupa.

14.3 Zariskijeva formulacija

Zariskijeva formulacija Hilbertovog 14. problema pita da li za kvazi–afin algebarsku raznolikosti X nad poljem k, pretpostavljajući da je X normalna i glatka, prsten regularnih funkcija na X je konačno generisana nad k.

Zariskijeva formlacija se pokazala kao ekvivalentna originalnom problemu za X normalno.

U algebri, Zariskijeva teorema konačnosti daje pozitivan odgovor na Hilbertovo 14. pitanje za polinomni prsten u dve promenljive, kao specijalan slučaj. Preciznije kaže :

Za dati normalan domen A, konačno generisan kao algebra nad poljem k, ako je L podpolje polja razlomaka od A sadržeći k kao $tr.deg_k(L) \leq 2$, onda je k-podalgebra $L \cap A$ je konačno generisana.

14.4 Nagatin kontraprimer

Nagata (1958.) daje sledeći kontraprimer za Hilbertov problem. Polje k je polje koje sadrži 48 elemenata $a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{16i}$ za i =1,2,3 koja su algebarski nezavisna nad primarnim poljem.Prsten R je polinominal prstena $k[x_1, ..., x_{16}, t_1, ..., t_{16}]$ u 32 promenljive. Vektorski prostor V je 13 - todimenzionalni vektorski prostor nad k koji sadrži sve vektore $(b_1, ..., b_{16})$ u k^{16} ortogonalnosti za svaki od tri vektorska $a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{16i}$ za $i = 1, 2, 3$.. Vektorski prostor V je trinaestodimenzionalna komutativna unipotentna algebarska grupa pod sabiranjem, i njegovi elementi deluju na R tako što popravljaju sve elemente t_j i uzimaju x_j do $x_j + b_j t_j$. Onda prsten elemenata od R nepromenljivih pod uticajem grupe V nije konačno generisana k-algebra.

Nekoliko autora je smanjilo veličinu grupe i vektorskog prostora u Nagatinom primeru.

Na primer, Totaro (2008.) je pokazao da nad bilo kojim poljem postoji delovanje sume G_a^3 tri kopije aditivnih grupa na k^{18} čiji invarijantni prsten nije konačno generisan.

15 Hilbertov 15. problem: rigorozno zasnivanje Schubertovog enumerativnog računa

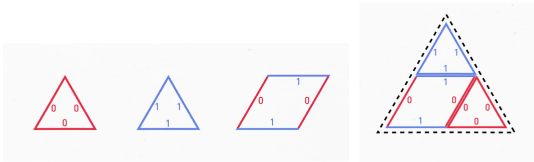
Schubert je odredio posebne geometrijske brojeve, na osnovu takozvanog principa posebnog položaja ili očuvanja broja pomoću enumerativnog računa koje je on razvio. Problem je rigorozno i tačno utvrditi granice validnosti tih brojeva.

Današnja algebra garantuje mogućnost sprovođenja procesa eliminacije, ali je za dokaz teoreme numeričke geometrije potrebno mnogo više. Naime, stvarno sprovođenje procesa eliminacije u slučaju jednačine posebnog oblika na takav način da se može predvideti stepen konačnih jednačina i mnoštvo njihovih rešenja.

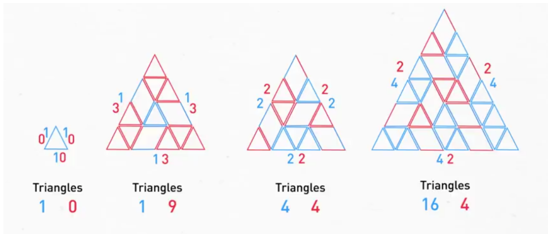
15.1 Schubert-ov geometrijski pristup

Zamislimo 3D prostor. Pitamo se koliko linija može da dodiruje ili prolazi kroz dve ili četiri prave u tom prostoru. Schubert je ovom problemu prvo pristupio tako što je po odredjenim pravilima pomerao linije u prostoru tako da one budu u specijalnom položaju radi lakšeg računa; kod problema sa četiri linije ako stavimo da se po dve seku, jasnije vidimo koliko mogućih kombinacija postoji. Dokle god smo pažljivi, osobine linija, kao što je broj onih koje ih seku, se neće promeniti. Pitanje je bilo kako odrediti broj i vrstu linija koje se seku, posebno za kompleksnije slučajeve i za više dimenzija.

Tu nastupa ideja o slagalicama; da se počne od tri osnovna oblika. Dva jednakostranična trougla, jedan plav i jedan crven i jednog paralelograma kod koga su naspramne stranice iste boje i koji je tačno duplo veći od trougla. Crvene stranice ćemo obeležavati sa 0 a plave sa 1. Cilj slagalice je slaganjem napraviti jednakostraničan trougao, tako da se dodiruju samo ivice koje su iste boje. Takvim slaganjima se dolazi do nekih pravilnosti. Da svaka strana svake od slagalica ima isti broj plavih i isti broj crvnih ivica. Ako izbrojimo i broj crvenih i plavih trouglova u svakom velikom nastalom trouglu, primećujemo da je broj malih trouglova jedne boje jednak kvadratu broja ivica te boje na jednoj strani velikog trougla. Dakle imamo konstataciju 1 : sve tri strane slagalice imaju isti broj ivica jedne boje ; i druga : broj plavih(crvenih) trouglova je kvadrat broja ivica na jednoj stranici trougla.

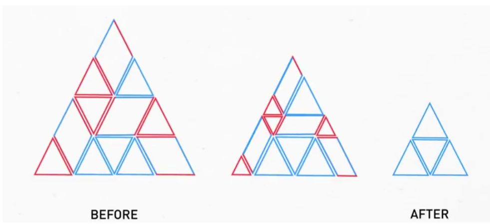


Slika 1: Osnovni oblici i primer slagalice



Slika 2: broj ivica i broj trouglova jedne boje u slagalicama

Ako nam je N ukupan broj ivica na svakoj strani, K broj plavih ivica onda je N-K broj crvenih ivica. Ako krenemo na slagalici da smanjujemo podjednako svaku crvenu ivicu i crveni trougao,tako da razmera ostaje ista, a da pri tome ne smanjujemo plave, videćemo da će se oblik trougla slagalice zadržati i da će na kraju,kada dužina crvenih ivica bude 0, ostati samo plavi trouglovi. Ovim se pokazuje da broj plavih ivica ostao isti pre i posle smanjivanja, što je K koje je zadržano,tako da je i broj crvenih N-K ostao isti i time potvrđujemo prvu konstataciju.



Slika 3: smanjivanje crvenih ivica

Što se tiče druge konstatacije ,neka je jedna jedinica jedan trougao. Slagalica ima N^2 trouglova po površini, ako bismo veliki trougao popunili samo sa jedinicama trougla. Nakon smanjivanja crvenih ivica, ostaje K ivica na svakoj strani tako da ima K^2 plavih jedinica trouglova. Taj broj se nije promenio smanjivanjem tako da i u velikom trouglu ima toliko plavih jedinica.Ima i $(N-k)^2$ crvenih jedinica,što bismo videli ako bismo smanjivali plave ivice umesto crvenih. Koristeći ove informacije,pitanje je koliko ima paralelograma u našoj slagalici? Ako dobijemo informaciju o tome kako je jedna strana obojena, znamo tačno koliko kojih elemenata imamo. Kakve ovo ima veze sa problemom?

Nas zanima povezanosti linija. Kod naše dve prave znamo da postoje dve vrste linija koje interaguju sa naše dve linije L1 i L2. Prva vrsta su sve one koje prolaze kroz tačku preseka naših pravih . Jasno je da sa dve prave koje se seku imamo definisanu tačno jednu ravan i da bilo koja prava unutar ravni ima presek sa naše dve, što je druga vrsta linija. Ali mi hocemo da to bude još rigoroznije. Pa pravimo ovaj šablon. ,,Skup svih linija koje dodiruju fiksnu —— i koje su sadržane u ——-".

Ako odredimo sledeće : 0D tačka, 1D linija, 2D posvrš i 3D prostor i neka nam brojevi 1 i 0 pokazuju kako smo popunili polja —— , onda dolazimo do sledećeg :

Skup svih linija koje dodiruju fiksiranu liniju i koje su sadržane u prostoru.

dobijamo [0 1 0 1]

Skup svih linija koje dodiruju fiksiranu liniju i koje su sadržane u površi.

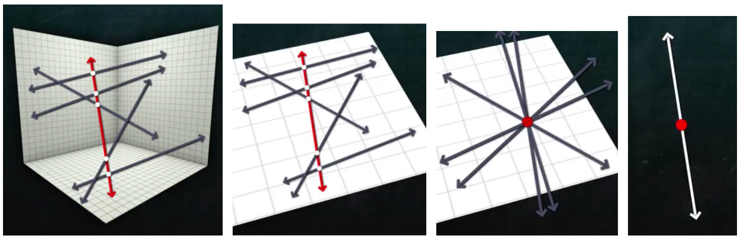
dobijamo [0 1 1 0]

Skup svih linija koje dodiruju fiksiranu tačku i koje su sadržane u površi.

dobijamo [1 0 1 0]

Skup svih linija koje dodiruju fiksiranu tačku i koje su sadržane u liniji.

dobijamo [1 1 0 0] ali tu postoji samo jedna prava.



Slika 4: Redom : [0 1 0 1] [0 1 1 0] [1 0 1 0] [1 1 0 0]

Pogledajmo preklapanje svih linija iz [1 0 0 1] i [1 0 0 1] što su dva skupa linija,od kojih svaki skup ima jednu zajedničku tačku. Znamo da je to jedna linija koja spaja te dve tačke,što zapisujemo kao

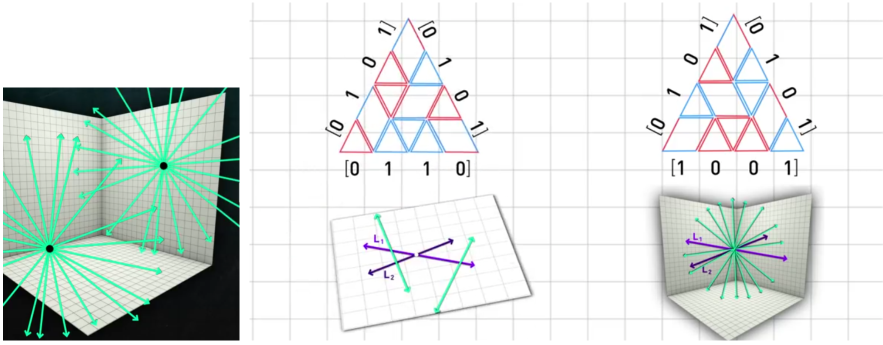
[1 0 0 1]*[1 0 0 1]=[1 1 0 0]. A kada primeri postaju komplikovaniji, onda pomažu slagalice.

Ako sa leve strane zapišemo jedan kod jedne linije a sa desne drugi, tada vidimo da ima dve kombinacije za popunjavanje velikog trougla, njegove donje ivice i to kodom [1 0 0 1] ili [0 1 1 0] ; geometrijski formulisano mogu biti sve linije koje prolaze kroz zajedničku tačku naših pravih L1 i L2 ili sve prave iz ravni koju formiraju naše prave L1 i L2. Do toga su došli Allen Knutson i Terence Tao. Da množenjem dva stanja dobijamo mogućnosti za vrste prava koje će im pripadati :

[0 1 0 0]*[0 1 0 0]=[1 0 0 1]+[0 1 1 0]

gde je množenje zapravo "i"a sabiranje "ili". Drugim rečima, linije koje sadrže jednu fiksiranu liniju "i"i još jednu fiksiranu liniju su linije koje se sreću u tački "ili"linije u površi.

Ako bismo pogledali primer sa četiri prave,gde se po dve se seku, to je zapisano kao [0 1 0 1]* [0 1 0 1]*[0 1 0 1]*[0 1 0 1] ,



Slika 5: problem : [0 1 0 0]*[0 1 0 0] i rešenja uz pomoć slagalice

uz distribuciju i rešenje slagalice kod svakog problema množenja

[0 1 0 1]*[0 1 0 1]*[0 1 0 1]*[0 1 0 1]
=([1 0 0 1] + [0 1 1 0])*[0 1 0 1]*[0 1 0 1]

=([1 0 0 1]*[0 1 0 1] + [0 1 1 0]*[0 1 0 1])*[0 1 0 1]

=([1 0 1 0] + [1 0 1 0])*[0 1 0 1]

=2[1 0 1 0]*[0 1 0 1]

=2*[1 1 0 0]

nakon par ponavljanja dobijamo 2*[1100] što su dve moguće linije. To se i geometrijski vidi : jedna linije je ona koja spaja preseke pravih a druga prestavlja presek ravni koje su nastale od parova prava. Uzet je problem u 3D da bi se lakše objasnilo kako bi bilo u više dimenzija i kompleksni prostor.

Što se tiče višedimenzionih prosotra, slagalica od N ivica na svakoj strani, od kojih je K jedinica, daje nam informaciju o K dimenzionom podprostoru u N dimenzijalnom prostoru što je divno jer nas približava prostorima koje inače ne bismo mogli da zamislimo. Nekada ovo nije bilo povezao sa fizikom, ali vremenom postaje centar teorije struna.

16 Hilbertov 16. problem : problem topologije algebarskih krivih i algebarskih površi

Ideja je ispitati odnose grana algebarskih krivih kada je njihov broj maksimalan i analogno tome ispitati broj, oblik i položaj slojeva algebarskih površi u prostoru.

16.1 Originalna formulacija

Svoj problem je predstavio kao :

Gornja granica zatvorenih i zasebnih grana algebarske krive n-tog stepena je odredio Harnack; odavde se javlja pitanje relativne pozicije grana u ravni. Za krive šestog stepena, ja sam-priznajem na prilično složen način - uverio sebe da tih 11 grana, kojih ima po Harnack-u, nikad ne mogu biti sve zasebne, nego da mora postojati jedna grana, koja ima drugu granu koja vodi njenu unutrašnjost i devet grana koje vode njenu spoljašnjost, ili obrnuto. Čini mi se da detaljnije ispitivanje relativnih pozicija gornje granice za zasebne grane je od velikog interesa, i slično tome i odgovarajuće istraživanje brojeva,oblika i pozicije slojeva algebarske površi u prostoru - još uvek nije poznato, koliko maksimalno slojeva ima u površini četvrtog stepena u trodimenzionalnom prosotru. [64]
Hilbert dalje govori :
Prateći ovaj čisto algebarski problem želeo bih da postavim pitanje koje, meni se čini, može biti pogodjeno istim metodom neprekidnog menjanja koeficijenata, i čiji odgovor je sličnog značaja za topologiju familija krivih koje su definisane diferencijalnim jednačinama - to je pitanje gornje granice i pozicije Poincaré-ovih graničnih krugova (kružnih granica) za diferencijalnu jednačinu prvog reda oblika :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$$

gde su X,Y integrabilne,racionalne funkcije n-tog reda u x,y ili homogeno zapisano :

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

Gde su X,Y,Z integralne,racionalne, homogene funkcije n-tog reda u x,y,z i one se smatraju funkcijama paramerta t. [65]

16.2 Opis problema

Originalan problem je postavljen kao 'Problem topologije algebarskih krivih i površi'. Zapravo on je sadržao dva slična problema u različitim granama matematike :

- Ispitivanje relativne pozicije grana realnih algebarskih krivih n-tog stepena (slično i za algebarske površi)
- Determinisanost gornje granice za broj kružnih granica u dvodimenzijalom polinomnom vektorskom polju n-tog stepena i ispitivanje njihovih relativnih položaja.

Prvi problem zasad nije rešen za n = 8. Zato se i on često podrazumeva pod Hilbertovim 16. problemom u realnoj algebarskoj geometriji.
Drugi problem ostaje nerešen : nema gornje granice za broj graničnih krugova koji su poznati za bilo koje $n > 1$, i ovo se podrazumeva pod Hilbertovim 16. problemom u dinamičkim sistemima.

16.3 Hilbertov 16. problem u realnoj algebarskoj geometriji

↱ U realnoj algebarskoj geometriji teorema Harnack-ove krive daje broj mogućih povezanih komponenti koje algebarska kriva može da ima, u smislu stepena krive. Za bilo koju algebarsku krivu stepena m u realno projektovanoj ravni, broj komponeti c je ograničen sa

$$\frac{1-(-1)^m}{2} \leq c \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$$

Kriva koja sadrži maksimalan broj realnih komponenti se zove **M-kriva** (zbog reči maksimum). Na primer, eliptična kriva koja ima dve komponente kao što je $y^2 = x^3 - x$, ili Trott-ova kriva, je kvarc sa četiri komponente i primer je M-krive. Ova teorema je korišćena za pozadinu Hilbertovog 16. problema. [66]

1876. Harnack je proučavao algebarske krive u realnoj projektovanoj ravni i pronašao je da krive n-tog stepena ne mogu imati više od

$$\frac{n^2-3n+4}{2}$$

zasebne povezane komponente. Dalje, pokazao je kako da se konstruišu krive koje su povezane sa tom gornjom granicom, tako da je to bio najbolji mogući način. Krive sa tim brojem komponenti su pomenute M-krive.

Hilbert je proučavao ove M-krive 6. stepena i primetio je da 11 komponenti uvek bivaju grupisane na specifičan način. Njegov izazov za matematičare je bio sada da se potpuno ispitaju moguće konfiguracije komponenti M-krivih. Tražio je generalizaciju Harnack-ove teoreme do algebarskih površi i slično istraživanje površi sa maksimalnim brojem komponenti.

16.4 Hilbertov 16. problem kroz dinamičke sisteme

Ovde ćemo razmatrati polinomna vektorska polja u realnoj ravni, što je sistem diferencijalnih jednačina oblika :

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \text{ , } \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

gde su P i Q realni polinominali n-tog stepena.

Poincaré je proučavao ova polinomna vektorka polja i imao je ideju da odustane od pronalaženja egzaktnih rešenja sistema i umesto toga pokuša da uoči kvalitativne osobine kolekcije svih mogućih rešenja. Uz mnoga bitna otkrića, pronašao je da ovakva rešenja ne moraju biti stacionarne tačke, ali bi mogla verovatno biti periodična rešenja. Takva rešenja se zovu granični krugovi.

Ideja drugog dela 16. problema jeste da se odredi gornja granica za broj graničnih krugova u polinomnom vektorskom polju n-tog stepena i, slično prvom delu, da se istraži njihov relativni položaj.

16.4.1 Rešenja

Pokazano je 1991/1992. da svako polinomno vektorsko polje u ravni ima samo konačno mnogo graničnih krugova. Ovaj iskaz nije očigledan,treba konstruisati glatko (C^∞) vektorsko polje u ravni sa beskonačno mnogo koncentričnih graničnih krugova.

Pitanje da li postoji gornja granica $H(n)$ za broj graničnih krugova planarnog polinomnom vektorskog polja n-tog stepena ostaje nepoznato za $n > 1$. ($H(1) = 0$ jer linearno vektorsko polje nema granične krugove.)

Evgenii Landis i Ivan Petrovsky su tvrdili da imaju rešenje 1950.godine, ali se ono pokazalo kao pogrešno 1960-tih. Kvadratno planarno vektorsko polje je poznato sa svoja četiri granična kruga. Primer numeričke vizuelizacije četiri granična kruga u kvadratnom planarnom vektorskom polju može se videti u na sajtu `https://link.springer.com/article/10.1007/s12591-012-0118-6`

Generalno glavne poteškoće u procenjivanju broja graničnih krugova preko numeričke integracije je u ugnježdenim graničnim krugovima sa jako uzanim regijama privlačenja, koje su skriveni privlačnici i polustabilni granični krugovi.

17 Hilbertov 17. problem : predstavljanje pozitivno definitnih racionalnih formi kao suma kvadrata

17.1 Uvod

Racionalna funkcije $f = \dfrac{g}{h}$ nad poljem racionalnih brojeva Q (ili poljem realnih brojeva R) je *pozitivno definitna* ukoliko važi :

$\forall x \in R(h(x) = / = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0)$

Tada 17.Hilbertov problem glasi :

Ako je f pozitivno definitna racionalna funkcija nad poljem Q ili R, da li je f onda zbir kvadrata nekih racionalnnih funkcija ?

Hilbert se bavio ovim i sličnim problemima, na primer, u 11.problemu se bavi aritmetičkom teorijom kvadratnih formi. On 1883. pozitivno odgovara na dato pitanje za slučaj racionalne funkcije f sa dva argumenta. Hilbert je pokazao i da je nužno ovaj problem formulisati za polinome. Pokazao je da postoje pozitivno definitni polinomi nad poljem realnih brojeva koji nisu konačne sume kvadrata nekih polinoma. Doduše nije naveo konkretan primer polinoma takve vrste. Primer polinoma je dobijen tek 1966., kada ga je našao Motzkin, to je : $p(x, y) = 1 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2$
.

17.2 Algebarsko rešenje

Za svaku od mnogih formulacija bitnu ulogu ima pojam realno zatvorenog polja. Pre definicije, da se podsetimo da $F[x_1,...,x_n]$ označava prsten polinoma nad poljem F, dok $F(x_1,...,x_n)$ označava polje racionalnih izraza nad F sa promenljivama $x_1,...x_n$.

Definicija : Polje F je realno zatvoreno akko :

1. svaki polinom $p \in F[x]$ neparnog stepena ima koren u F;
2. za sve $x_1,...,x_n \in F, x_1^2+...+x_n^2 = 0$ povlači $x_1 = 0,...,x_n = 0$;
3. $\forall x \exists y (y^2 = x \vee y^2 = -x)$

Uslov 3 govori da se u F može uvesti funkcija korenovanja za nenegativne elemente , dok se 1. uslov odnosi na neku vrstu neprekidnosti polinomnih funkcija u realno zatvorenim poljima.

Primeri realno zatvorenih polja su polje realnih brojeva i polje realnih algebarskih brojeva.

Važna osobina realno zatvorenih polja je da postoji jedinstveno uređenje $\leqslant$ domena F tako da je $(F,\leqslant)$ uređeno polje. To uvodimo ovako:

$\forall x, y \in F (y \leqslant x \longleftrightarrow \exists z x = y + z^2)$

i za ovako uvedenu relaciju $\leq$ važe aksiome linearnog uređenja

$x \leqslant x, x \leqslant y \wedge y \leqslant x \rightarrow x = y, \quad x \leqslant y \wedge y \leqslant z \rightarrow x \leqslant z, \quad x \leqslant z \vee y \leqslant x;$

i aksiome saglasnosti :

$x \leqslant y \rightarrow x + z \leq y + z, \quad x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z \rightarrow xz \leqslant yz$.

Kod uređenih polja moguće je govoriti o stalno pozitivnim ili pozitivno definitnim polinomima ili racionalnim funkcijama. Takvi polinomi su zbirovi kvadrata proizvoljnih polinoma. Ima i drugih kao što je funkcija $q(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Primetimo da se ona može zapisati i kao zbir kvadrata dve funkcije :

$$q(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2$$

što ide u prilog potvrdnog odgovora na Hilbertov 17. problem.

Ovaj primer možemo jednostavno generalizovati na racionale funkcije koje nastaju kao količnici zbirova kvadrata polinoma. Tako je funkcija $q = (x_1^2+...+x_n^2)/(y_1^2+...+y_m^2)$ pozitivno definitna. Možemo je predstaviti kao zbir kvadrata racionalnih izraza :

$$q = \frac{(x_1^2+...+x_n^2)(y_1^2+...+y_m^2)}{(y_1^2+...+y_m^2)^2} = \frac{x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + ... + x_n^2y_n^2}{(y_1^2+...+y_m^2)^2}$$

odakle dobijamo

$$q = \sum_{j,k} \left(\frac{x_i y_j}{y_1^2+...+y_n^2}\right)^2$$

17.2.1 Proširenje pojma pozitivne definitnosti polinoma na bilo koje polje

Ako je $F = (F, +, \cdot, \leqslant 0, 1)$ uređeno polje i $f \in F[x]$ onda se definicija pozitivne definitnosti uvodi kao ranije.

Ako je $F = (F, +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$ bilo koje polje, onda je $f \in F[x]$ pozitivo definitan ukoliko je f pozitivno definitan u svim ekpanzijama polja F do uređenog polja $(F, \leqslant)$

U vezi Hilbertovog pitanja, sada dolazimo do sledećih pretpostavki :

H_1 − neka je F zatvoreno polje; ako je $f \in F(x)$ pozitivno definitna, tada je za neki prirodan broj n racionalna forma f zbir kvadrata nekih racionalnih formi nad F.

H_2 − iskaz H_1 važi ukoliko se otkloni pretpostavka da je F realno zatvoreno;

H_3 − ako je iskaz H_1, odnosno H_2, tačan, onda postoji neka granica za broj n sabiraka koja zavisi jedino od broja promenljivih u funkciji f, a ne i od same funkcije.

1926. Artin dokazuje :

1° H_1 važi;

2° H_2 važi pod uslovom da je svako uredjeno polje F arhimedovsko. Svakako najbitniji doprinos rešavanju Hilbertovog problema je dao Emil Artun,koji je jedno vreme bio Hilbertov asistent i kolega u Getingenu. Artinovo rešenje bilo je zasnovano na Artin-Schreirovoj teoriji formalno-realnih polja, za razliku od Hilbertovog, u osnovi dokaza u slučaju racionalnih funkcija od dva argumenta. Pored toga Artin je iskoristio i Stumovu teoriju o broju korena polinoma u datom intervalu.

Što se tiče iskaza H_3, E. Landau je ovo dokazao za slučaj polja racionalnih brojeva :

Svaka pozitivno definitna racionalna funkcija $f \in Q(x)$ je suma najviše 8 kvadrata racionalnih funkcija nad Q.

Granice problema na bilo koje algebarsko realno polje je proširio Pourchet. Dokazao je da je 5 najbolja granica u problemu H_3. Zahvaljujući Artinovoj teoriji , H_2 važi za polje racionalnih brojeva Q bez ograničenja u broju promenljivih.

Ima i negativnih rezultata,kao što je Dubois-ov dokaz da H_2 ne važi u proizvoljnim poljima. Konstruisao je uređeno polje F i pozitivno definitan polinom p nad F koji nije predstavio kao neki zbir kvadrata nekih racionalnih izraza nad F. Dakle, nužno je dodati još neke pretpostavke u problemu H_2, mada je u potpunosti rešen metodama matematičke logike.

Tsen, Lang, Ax i Pfister dokazuju da je $n = 2^k$ gornja granica u H_3, za realno zatvorena polja (k je broj promenljivih).

Još uvek imamo probleme koji nisu rešeni, kao na primer :

1° Da li je 2^k najbolja granica u H_3 ?

2° Odrediti najbolju granicu u H_3 za slučaj racionalnih brojeva Q.

17.3 Hilbertov 17. problem i logika

Abraham Robinson i A. Maljcev može se reći da uvode logiku u matematiku. Danas najznačajnije primene logike u matematičkim oblastima, nestandarna analiza i modelsko-teorijska algebra, potiču od A. Robinsona, a Maljcev daje prve priloge takve vrste u algebri još 1936. Robinson se bavio primenjenom matematikom u aeronautici i 1949. je doktorirao iz oblasti matematičke logike. Robinsonovo rešenje Hilertovog 17. problema metodama matematičke logike,tačnije teorije modela, predstavlja značajan prilog matematičko-teorijskoj algebri. U osnovi, model se zasniva na metodu eliminacija kvantora i pojmu modelske potpunosti. Modelska potpunost predstavlja modelsko-teorijski pandan metodi eliminacije kvantora. Možemo ga i videti kao princip prenosa, što je značajno za primene u algebri.

Definicija : Terorija T u predikatskom računu prvog reda dopušta eliminaciju kvantora ukoliko za svaku formulu φ teorije T postoji formula ψ bez kvantora u jeziku teorije T, tako da važi :

$T \vdash \varphi \longleftrightarrow \psi$.

Logičku osnovu modelsko-teorijskog rešenja 17. Hilbertovog problema čini sledeća teorema :

Teorema (A.Tarski 1949.) : Teorija uređenih zatvorenih polja dopušta eliminaciju kvantora.

Teorije koje dopuštaju eliminaciju kvantora imaju vrlo važnu osobinu:

$*$ Svaka teorija koja dopušta eliminaciju kvantora je modelski potpuna.

Da bi ovo bilo jasnije,pretpostavimo da je T proizvoljna teorija prvog reda jezika L. Neka su A i B proizvoljne operacijsko-relacijske strukture (modeli) istog jezika. Model A je elementarni podmodel modela B, odnosno B je elementarno proširenje modela A, ako su ispunjeni uslovi:

1°A je podmodel modela B;

2° za svaku formulu $\varphi\overrightarrow{x}$ jezika L i sve $\overrightarrow{a} \in A$ važi

$$A \vDash \varphi\overrightarrow{(a)} \text{ akko } B \vDash \varphi\overrightarrow{(a)}$$

Da je A podmodel modela B zapisujemo $A \prec B$.

Definicija : Teorija T je modelski potpuna akko za proizvoljna dva modela A, B teorije T važi :

ako je A podmodel modela B, onda je A elementaran podmodel modela B.

Ovom definicijom modelske potpunosti nije teško dokazati tvrdnju $*$ Stvarno, pretpostavimo da teorija T dopušta eliminaciju kvantora i neka su A i B modeli teorije T. Pretpostavimo da je A podmodel modela B i neka je $\varphi\overrightarrow{x}$ proizvoljna formula jezika teorije T. Najzad uzmimo da je

$A \vDash \varphi\overrightarrow{(a)}$, $\overrightarrow{a} \in A$.

Kako teorija T dopušta eliminaciju kvantora, postoji formula ψ bez kvantora,koja je isto u jeziku teorije T, tako da važi $T \vdash \varphi \longleftrightarrow \psi$. S obzirom da je model A model teorije T, to je onda

$A \models \forall \overrightarrow{x}(\overrightarrow{\varphi(x)} \leftrightarrow \overrightarrow{\psi(x)})$,

odakle sledi $A \models \overrightarrow{\psi(a)}$. Po pretpostavci A je podmodel modela B i $\overrightarrow{\psi(a)}$ je formula bez kvantora, odakle sledi $B \models \overrightarrow{\psi(a)}$.

Sada, slično kao malopre nalazimo

$B \models \forall \overrightarrow{x}(\overrightarrow{\varphi(x)} \leftrightarrow \overrightarrow{\psi(x)})$

odakle je $B \models \overrightarrow{\varphi(a)}$.

Dakle, dokazali smo da $A \models \overrightarrow{\varphi(a)}$ povlači $B \models \overrightarrow{\varphi(a)}$ za bilo koju formulu $\overrightarrow{\varphi(x)}$ i $\overrightarrow{a} \in A$. Na sličan način se dokazuje implikacija u suprotnom smeru.

Uočimo da sada simbol $\overrightarrow{f(x)}$ ima dvostruku ulogu.

Naime $f \in \overrightarrow{F(x)}$ i $f < 0$ znači ,,da je element f u polju $\overrightarrow{F(x)}$ manji od nule ". Osim toga, $F \subseteq \overrightarrow{F(x)}$, pa koeficijenti racionalne funkcije f leže takođe u polju $\overrightarrow{F(x)}$. Stoga je $f(x)$ racionalna forma i nad poljem $\overrightarrow{F(x)}$. Ako je

$f(x) = \sum \alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$

onda se ova racionalna funkcija nad $\overrightarrow{F(x)}$ radi razlikovanja od elementa f može beležiti ovako :

$f(\overrightarrow{X}) = \sum \alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$

Dakle, domen promenljivih $x_1, ..., x_n$ je F , dok je domen za promenljive $X_1, ..., X_n$ skup racionalnih izraza $\overrightarrow{F(x)}$. Primetimo da su onda elementi $x_1, ..., x_n$ skupa $\overrightarrow{F(x)}$, dok to $X_1, ..., X_n$ nisu. Odavde vidimo koje je značenje simbola $f\overrightarrow{x}$ podrazumevano.

17.4 Rešenje Hilbertovog 17. problema za polje realnih brojeva R (A. Robinson 1955.)

Teorema $\star$: Neka je F realno zatvoreno polje i neka racionalna funkcija $f \in F(x)$ nije suma kvadrata nekih racionalnih funkcija. Tada postoji uredjeno polje $(F(x), \leqslant)$ u kojem je $f < 0$

Neka je $f \in \overrightarrow{R(x)}$ i pretpostavimo da f nije suma kvadrata; tada po teoremi $\star$ postoji uređenje polja racionalnih funkcija $\overrightarrow{R(x)}$tako da u tom polju važi $f < 0$. Neka je $(\overrightarrow{\tilde{R}(x)}, \leqslant)$ realno algebarsko zatvaranje polja $(\overrightarrow{R(x)}, \leqslant)$.

Tada je $f < 0$ i u ovom polju, odakle sledi

$$(\overrightarrow{R(x)}, \leqslant) \models \exists \overrightarrow{x} \overrightarrow{f(x)} < 0 \ (1)$$

Ovde je korišćena činjenica da svako realno zatvoreno polje ima jedinstveno proširenje do uređenog polja pa odatle sledi

$(R, \leqslant)$ je podmodel modela $(\overrightarrow{\tilde{R}(x)} \leqslant)$

Označimo sa T teoriju uređenih realno zatvorenih polja. Prema teoremi Tarskog teorija T dopušta eliminaciju kvantora;dakle prema $*$ teorija T je isto modelski potpuna. Prema ovoj osobini teorije T i (1) sledi :

$$(R, \leqslant) \vDash \exists \overrightarrow{x} f(x) < 0$$

tj. racionalna funkcija f nije pozitivno definitna.

18 Hilbertov 18. problem : građenje prostora od kongruentnih poliedara

Pričaćemo o građenju prostora od kongurentnih poliedara. Ovaj problem se odnosi na tri zasebna pitanja (u svojoj originalnoj formulaciji).

18.1 Simetrične grupe u n dimenzija

Prvi deo problema se bavi pitanjem da li postoje samo konačno mnogo esencijalnih različitih prostornih grupa u n-dimenzijalnom Euklidskom prostoru.(konačno mnogo tipova podgrupa grupe $E(n)$ od izometrija $\mathbb{R}^n$ sa kompaktnim fundamentalnim domenom) Na to je odgovorio L. Bieberbach (1910.)

Podgrupe o kojima se govori se sada zovu Bieberbah-ove grupe.

18.2 Anisoedarska pločica u tri dimenzije

Popločavanje prostora uz sam polihedron koji nije fundamentalnog domena kao u prvom delu problema. Generalnije, isto i neperiodično popločavanje prostora se razmatra. Monoedrijalno popločavanje u kome svaka pločica jeste kongruentna jednom fiksiranom setu T. Još više, pločica ne treba da potiče iz fundamentalnog domena grupe pokreta, priča se o anisoedarskom popločavanju. U ovom smislu, ovaj deo problema je odgonetnuo K. Reinhardt (1928.), koji je našao anisoedarsko popločavanje u $\mathbb{R}^3$ i H. Heesh (1935.) koji nalazi nekonveksne anisoedarne poligone u planaru koji priznaju periodični monoedralno popločavanje. Postoje i konveksna anisoedarski pentagoni. Ovo je još uvek živa tema. Na primer, koveksni politop koji može da da monoedralnu pločicu u $\mathbb{R}^d$ 1998. još uvek nije bila klasifikovana , čak ni za ravan.

Postavljajući problem u tri dimenzije, Hilbert je verovatno pretpostavljao da ne postoji takva pločica u dve dimenzije; kasnije se ta pretpostavka pokazala netačnom.

Važne teorije do kojih se došlo su Penrose-ove pločice i kvazi kristali. Kao još jedan problem koji se pojavio, (1998.) nije se znalo koje poliomini popločavaju celu ravan. (poliomino je povezana figura dobijena uzimanjem n identičnih jedinica kvadrata i povezujući ih duž zajedničkih ivica).

18.3 Sferno pakovanje

Treći deo problema pita za najgušće sfersko pakovanje ili pakovanje drugog naznačenog oblika. Iako definitivno koristi druge oblike osim sfera,generalno se uzima kao ekvivalent Keplerovoj konjukciji.

Do 1998. je još uvek bila smatrana generalno nerešenom. 1998. godine američki matematičar Thomas Callister Hales je dao računarski dokaz Keplerovih konjekcije.To pokazuje da prostorno najefikasniji način pakovanja sfera je u piramidalni oblik.

⋆ Leech rešetka je zasad verovatno najgušće pakovanje u 24 dimenzije. Poznata su najgušća rešetkasta pakovanja u dimenzijama od 1 do 8. U dimenzijama 10, 11 i 13 postoje pakovanja koja su gušća od bilo kojeg rešetkastog pakovanja.

19 Hilbertov 19. problem : Da li su rešenja regularnih problema u računu varijacija nužno analitička?

Da li Langražova parcijalna diferencijalna jednačina regularnog variacionog problema ima isključivo analitičke integrale?

Neformalno,i manje direktno,pošto se Hilbertov koncept "regularnog varijacionog problema" identifikuje kao precizno varijacioni problem čija Euler-Langrange-ova jednačina jeste eliptična parcijalno diferencijalna jednačina sa analitičkim koeficijentima,Hilbertov devetnaesti problem, uprkos naizgled tehničkom problemu,jednostavno pita da li, u ovoj klasi diferencijalnih jednačina , bilo koje rešenje funkcije nasleđuje relativno jednostavno i dobro poznatu strukturu od rešene jednačine. Hilbertov 19. problem je rešen kasnih 1950. od strane Ennio De Giorgi i John Forbes Nash.

19.1 Istorija

19.1.1 Poreklo problema

David Hilbert je predstavio sada nazvani Hilbertov 19. problem u njegovom govoru na Drugom Internacionalnom Kongresu Matematičara. Tu on govori da,po njegovom mišljenju, jedan od najizvandrednijih faktora teorije analitičkih funkcija jeste da postoje slučajevi parcijalnih diferencijalnih jednačina koje priznaju samo takvu vrstu funkcija kao rešenje, navodeći Laplasovu jednačinu, Liovilovu jednačinu, jednačinu minimalne površine i klasu linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina učenih od strane Émile Picard-a kao primeri. On je onda primetio da većina parcijalnih diferencijalnih jednačina koje dele ovu osobinu su Euler-Lagrange-ove jednačine jasno definisanog tipa varijacionih problema, ističući sledeće tri osobine :

(1) $\iint F(p, q, z; x, y) dxdy = Minimum \left[\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \right]$

(2) $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 p} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial^2 q} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right)^2 > 0$

(3) F je analitička funkcija svih njenih argumenata p, q, z, x iy.

Hilbert ovaj tip varijacionog problema naziva "regularan varijacioni problem" : osobina (1) znači da takav tip varijacionog problema jeste minimum problema, osobina (2) je eliptički uslov u Euler-Lagrange-ovoj vezi sa datom funkcijom, dok osobina (3) je jednostavna regulaciona pretpostavka funkcije F. Kada je identifikovao klasu problema sa kojom treba da radi, on je onda postavio sledeće pitanje : "Da li svaka Lagrange-ova parcijalna diferencijalna jednačina regularnog varijacionog problema ima osobinu da ekskluzivno priznaje analitičke integrale?" i pitao je dalje da li je ovo slučaj i kada bi funkcija trebala da pretpostavi, kao što se dešava kod Dirichlet-ovih problema za potencijalne funkcije, granične vrednosti koje su neprekidne, ali ne i analitičke.

19.1.2 Put do kompletnog rešenja

Hilbert govori u svom 19.-tom problemu kao problemu regularnosti za klasu eliptičnih parcijalnih diferencijalih jednačina sa analitičnim koeficijentima, tako da prvi pokušaji istraživača koji su želeli da reše problem upućuje na uočavanje regularnosti klasičnih rešenja za jednačine koje pripadaju ovoj klasi. Za C^3 rešenje Hilbertovog problema je našao Sergei Bernstein (1904.), u njegovoj tezi : on je pokazao da su za C^3 rešenja nelinearnih eliptičnih analitičkih jednačina sa dve promenljive analitička. Bernstein-ov rezultat je poboljšan tokom godina od strane nekoliko autora, kao što je Petrowsky (1939.), koji je smanjio zahteve za diferencijabilnost koji su bili potrebni da se rešenje odredi kao analitičko. Sa druge strane , direktne metode u varijacionom računu pokazala su postojanje rešenja sa jako slabim diferencijabilnim osobinama. Tokom mnogo godina postojala je rupa izmedju tri rešenja : rešenja koja su mogla biti konstruisana su bila poznata da imaju kvadratne integrabilne druge derivate, koji nisu bili dovoljno jaki da doprinose mašineriji koja bi dokazala da su analitički, čemu je bio potreban kontinuitet prvih derivata. Ova praznina je popunjena od strane Ennio De Giorgi (1956.,1957.) i John Forbes Nash (1957.,1958.). Oni su bili u mogućnosti da pokažu da rešenja imaju prve derivate koji su bili Hölder neprekidne, što je po prošlim nalazima impliciralo da su rešenja analitička kada god diferencijalna jednačina ima analitičke koeficijente,i tako upotpunjavajući Hilbertov 19. problem.

19.2 Kontraprimeri za razne generalizacije problema

To do čega su došli Ennio i John je dovelo do pitanja da li je njihov zaključak primenjiv na Euler-Lagrange-ove jednačine mnogo generalnijih funkcija : na kraju 1960.,Maz'ya (1968),De Giorgi (1968) i Giusti i Miranda (1968) su došli do nekoliko nezavisnih kontraprimera, pokazujući da generalno nema nade da postoji takva regularnost bez dodavanja još hipoteza.
Preciznije, Maz'ya je 1968. dao nekoliko kontraprimera koji uključuju jednu eliptičnu jednačinu koja je reda većeg od dva sa analitičkim koeficijentima: za eksperte,senzacionalna je bila činjenica da takva jednačina može da ima neanalitička ili čak ne-glatka rešenja. [24]
De Giorgi i Giusti i Miranda 1968. su dali kontraprimere koji su pokazali da u slučaju rešenja koja su vektorske vrednosti radije nego skalarne,trebalo je da budu analitičke : primer De Giorgi-a je imao eliptični sistem sa graničnim koeficijetima, dok je onaj od Guisti-a i Miranda imao analitičke koeficijente. [25]
Kasnije je Nečas 1977. dao još jedan primer za problem sa vektorskom vrednošću.

19.3 De Giorgi-jeva teorema

Teorema koju je dao je a priori procena koja izriče da ako je u rešenje odgovarajuće linearne jednačine drugog reda striktno eliptični PDE forme

$$D_i(a^{ij}(x)D_ju) = 0$$

i u ima kvadratne intgrabilne prve derivate , onda je u Hölder-ova neprekidna.

19.4 Primena De Giorgi-ove teoreme na Hilbertov problem

Hilbertov problem pita da li minimalizator w energetske funkcije kao što je

$\int_U (L_{p_i}(Dw))_{x_i} = 0$

jeste analitički. Ovde je w funkcija nekog kompaktnog skupa U od R^n, dw je gradijent vektora i L je Lagranžijan, funkcija izvoda od w koja zadovoljava monotonost, glatkost i uslove konvekstnosti. Glatkost od w može se pokazati koristeći De Giorgi-ovu teoremu kao što sleduje.

Euler-Lagrange-ova jednačina za ovaj varijacioni problem je nelinearna jednačina koja nakon diferenciranja do x_k nam daje

[24] kaže Gohberg 1999,p.1

[25] Videti (Giaquinta 1983, pp. 54–59) and (Giusti 1994, p. 7, pp. 202–203 and pp. 317–318).

$$\sum_{i=1}^{n}(L_{p_ip_j}(Dw)w_{x_jx_k})_{x_i} = 0$$

što znači da $u = w_{x_k}$ zadovoljava lineranu jednačinu

$D_i(a^{ij}(x)D_ju) = 0$

uz $a^{ij} = L_{p_ip_j}(Dw)$

tako da po De Giorgi-u rešenje w ima Hölder neprekidnost prvog izvoda, pod pretpostavkom da je matrica $L_{p_ip_j}$ ograničena. Kada ovo nije slučaj, potreban je još jedan korak : mora se dokazati da je rešenje w Lipschitz neprekidna, tj. da gradijent Dw jeste L^∞ funkcija.

Jednom kada je w poznato da ima Hölder neprekidna (n + 1.) izvida za neke $n \geqslant 1$, onda koeficijenti a^{ij} imaju Hölder neprekidnost n-tog izvoda,pa teorema Schauder-a implicira da (n+2.) izvod takodje jeste Hölder neprekidna,i tako ponavljajući ovo do beskonačnosti, pokazujemo da rešenje w jeste glatko.

19.5 Nash-ova teorema

Nash svoje rešenje daje nezavisno i skoro simultano daje paraboličku verziju rešenja ovog problema. On implicira da sve kvazilinearne paraboličke jednačine, uz razumne pretpostavke, imaju glatka rešenja. Ovo kao i De Giorgi-jevo rešenje su donela potpuno nove metode rešavanja. Skoro sve u regularnoj teoriji vezano za eliptične i parabolične jednačine koje su se kasnije pojavile je bilo pod uticajem ova dva rada.

John Nash nam je dao procenu neprekidnosti za rešenja paraboličke jednačine

$D_i(a^{ij}(x)D_ju) = D_t(u)$

gde je u granična funkcija od $x_1, .., x_n, t$ definisana za $t \geqslant 0$. Od njegove procene Nash je bio u mogućnosti da izvede procenu rešenja za eliptičnu jednačinu

$D_i(a^{ij}(x)D_ju) = 0$

tako što je uzeo u obzir specijalan slučaj u koje ne zavisi od t.

19.6 De Giorgi-Nash-Moser-ova teorema

Teorema nam govori o Holder pretpostavci i Harnack-ovoj nejednakosti za uniformne eliptične ili paraboliče jednačine sa grubim koeficijentima u divergentnom obliku. Nakon nezavisnih rezultata De Giorgi-a i Nash-a, novi dokaz je dat od strane Jurgen-a Moser-a.

Jednačina u eliptičnom obliku

$\mathrm{div} A(x)\nabla u(x) = \partial_i a_{ij}(x)\partial_j u(x) = 0,$

ili drugačije

$u_t = \mathrm{div} A(x,t)\nabla u(x).$

Ovde je $A = \{a_{ij}\}$ je matrica vrednosti funkcija L^∞ koja zadovoljava uniformno eliptične uslove za neko $\lambda > 0$,

$$\langle Av, v\rangle \geq \lambda \mid v \mid^2$$

, za svako $v \in \mathbb{R}^n$ uniformno u prostoru i vremenu.

Odgovarajući rezultat u ne-divergencijalnoj formi je Krylov-Safonova teorema. Za jednačine koje nisu lokalne, postoji analogno rešenje i za Holderovu pretpostavku i za Harnack-ovu nejednačinu.

19.7 Eliptična verzija

Za rezultat kod eliptičnog slučaja, pretpostavljamo da je jednačina
$\mathrm{div} A(x)\nabla u(x) = 0$
zadovoljeno do jedinice lopte B_1 od $\mathbb{R}^n$.

Holder-ova pretpostavka: Pretpostavka kaže da ako je u rešenje L^2 do uniformne eliptične divergencije od jednačine iznad, onda je u Holder neprekidna u $B_{1/2}$ i

$||u||_{C^\alpha(B_{1/2})} \leq C||u||_{L^2(B_1)}$.

Konstante C i $\alpha > 0$ zavise od n (dimenzije), λ i $||A||_{L^\infty}$.
Rezultat može biti skaliran na lopte radijusa $r > 0$ da bi se zadržalo

$[u]_{C^\alpha(B_{r/2})} \leq C\frac{||u||_{L^2(B_r)}}{r^\alpha}$.

Pokrivajući domen Ω sa loptama, može se pokazati rešenje jednačine za Ω je C^α u unutrašnjosti Ω.

Harnack-ova nejednačina: Nejednačina govori da je u nenegativno rešenje jednačine u B_1 :
$B_{1/2}$:

$$\max_{B_{1/2}} u \leq C \min_{B_{1/2}} u.$$

Konstanta C zavisi samo od n,λ i $||A||_{L^\infty}$.

Minimiziranje konveksnih funkcionala: Pitanje na koje se odnosio Hilbertov problem je bio da li su minimizeri Dirichlet-ovog integrala

$J(u) := \int_\Omega F(\nabla u)\mathrm{d}x$

uvek glatki ako je F glatko i striktno konveksno. Teorema DG-N-M u eliptičnoj formi može biti primenjena na diferencijalne kvocijente minimizera od J da bi se pokazalo da je rešenje $C^{1,\alpha}$. Onda kada je očuvana ta osnovna regularnost, dalje regularnosti slede uz Schauder-ovu pretpostavku i uz glatkost funkcije F.

19.8 Parabolična verzija

Za ovu verziju, pretpostavljamo da je jednačina
$u_t - \mathrm{div} A(x)\nabla u(x) = 0$
zadovoljena do jedinice cilindra $(0,1] \times B_1$ od $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Holderova pretpostavka: Holder kaže da ako je u L^2 rešenje za uniformnu eliptičnu divergentnu formu jednačine iznad, onda je u Holder neprekidna u $[1/2,1] \times B_{1/2}$ i

$$||u||_{C^\alpha([1/2,1]\times B_{1/2})} \leq C||u||_{L^2([0,1]\times B_1)}.$$

Konstante C i $\alpha > 0$ zavise od n (dimenzija), λ i $||A||_{L^\infty}$.

Harnack-ova nejednakost: Harnack kaže da ako je u nenegativno rešenje jednačine u $[0,1] \times B_1$, onda njegov minimum kontroliše njegov maksimum u prošlom vremenu :

$$\sup_{[1/4,1/2]\times B_{1/2}} u \leq \inf_{[3/4,1]\times B_{1/2}} u.$$

19.9 Gradijentni tok

Parabolična verzija teorije može biti iskorišćena da se pokaže da rešenja do gradijentnog toka jednačina sa striktno konveksnim energijama jesu glatka.
$u_t + \partial_u J[u] = u_t - \mathrm{div}\,((\partial_i F)(\nabla u)\partial_i u) = 0.$
Ideja dokaza jeste da izvodi od u (ili njegovi diferencijalni kvocijenti) zadovoljavaju jednačinu sa grubim ali uniformno eliptičnim koeficijentima.

20 Hilbertov 20. problem : opšti problem graničnih vrednosti

Ovim problemom se postavlja pitanje da li svi problemi granične vrednosti mogu biti rešeni .

Da li svaki regularni variacioni problem ima rešenje, pod uslovom da su zadovoljene neke pretpostavke koje se tiču datih graničnih uslova , npr. funkcije sa datim graničnim uslovima su neprekidne i imaju jedan ili više izvoda u nekim delovima i pod uslovom da se,ako je to potrebno, pojam rešenja na neki način proširi?

Hilbert je primetio da postoje metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina kod kojih se daju vrednosti funkcija na granici, ali problem se bavi pitanjem metoda za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina sa komplikovanijim uslovima oko granica (na primer ako uključimo i izvode funkcije), ili za rešavanje računa kod problema koji imaju više od jedne dimenzije (kao što su problemi minimalne povrešine ili minimalne krive)

20.1 Izjava problema

Problem glasi :

Bitan problem koji se blisko tiče onog u toku (Hilbert ukazuje na 19. problem) jeste pitanje koje se tiče postojanja rešenja za parcijalne diferencijalne jednačine kada su vrednosti na granici regije propisane.

Ovaj problem je rešen u suštini iz metode H. A. Schwarz-a, C. Neumann-a i Poincaré za diferencijalne jednačine potencijala. Ove metode izgleda da nisu sposobne da se direktno prošire na slučajeve kod kojih oko granice ima propisanih ili diferencijalnih koeficijenata ili bilo koje povezanosti izmedju ovih i vrednosti funkcije. Niti mogu biti proširene odmah na slučaj kod kojih se ništa ne istražuje osim potencijalnih površina ali,recimo, za površine najmanjih oblasti , ili površine sa konstantnom pozitivnom Gausovom krivom,koje mogu da prođu kroz predefinisanu uvijenu krivu ili da se razvuku preko date površine oblika prstena.

Ja sam uveren da će biti moguće dokazati da ovakve teoreme postoje pomoću generalnog zakona čija priroda je indukovana Dirichelt-ovim principom. Opšti zakoni će nam valjda onda omogućiti da pristupimo odgovoru na pitanje : Nema li svaki regularni varijacioni problem rešenje, pod uslovom da ima neke pretpostavke koje imaju veze sa datim graničnim uslovima koji su zadovoljeni (recimo da su funkcije kojih se tiču ovi granični uslovi neprekidne i imaju u sektorima jedan ili više izvoda), i da je još ostvareno , pod uslovom da je potrebno, da pojam rešenja bude na odgovarajući način proširen ?
[26]

20.2 Problem granične vrednosti

Kod diferencijalnih jednačina,problem granične vrednosti je diferencijalna jednačina sa kompletom dodatnih ograničenja, nazvanih granični uslovi. Rešenje problema granične vrednosti je rešenje diferencijalne jednačine koje zadovoljava istovremeno i granične uslove.

Da bi bila korisna za primenu, granična vrednost problema treba biti dobro postavljena. Ovo znači da uz dati unos za problem postoji jedinstveno rešenje, koje zavisi kontinuirano od upisa. Mnogo teorijskog posla u oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina je posvećeno dokazivanju da granični problemi koji se pojavljuju kod naučnih i inženjerskih primena jesu stvarno dobro postavljeni.

[26]Hilbert, David, "Mathematische Probleme"Göttinger Nachrichten, (1900), pp. 253-297, and in Archiv der Mathematik und Physik, (3) 1 (1901), 44-63 and 213-237. Published in English translation by Dr. Maby Winton Newson, Bulletin of the American Mathematical Society 8 (1902), 437-479 [1] [2] doi:10.1090/S0002-9904-1902-00923-3 . [A fuller title of the journal Göttinger Nachrichten is Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen.]

20.3 Rešavanje problema

Sama problematika problema graničnih vrednosti je tek počinjala u ovom periodu. Ogroman rad je ostvaren od tada uključujući generelizovana rešenja kao što su distribucije (generalizovane funkcije) i relativo skoro (1998.) za nelinearne slučajeve, generaizovane algebarske funkcije. Rešenja je pronašao E.E. Rosinger koji je izdao 1990. "Non-linear partial differential equations", [27] Godinu dana kasnije Šolutions of continuous nonlinear PDE's through order completion. Part I". [28]

Najskorije rešenje je ono objavljeno 1998. pod nazivom "Parametric Lie group actions on global generalised solutions of nonlinear PDEs". [29]

Rešavanja graničnih problema primenjivana su za razne stvari kao što su : metod kompleksnih promenljivih, eliptične jednačine, klasične diferencijalne jednačine, parcijalne diferencijalne jednačine, teorija potencijala i Plateau problem.

21 Hilbertov 21. problem : Dokaz postojanja linearnih diferencijalnih jednačina sa zadatom monodromskom grupom

21.1 Zapis problema

Dokaz postojanja linearnih diferencijalnih jednačina koje imaju predefinisanu monodromsku grupu

U teoriji lineranih diferencijalnih jednačina sa jednom nezavisnom promenljivom z,želim da ukažem na važan problem koji je verovatno bio poznat i Riemann-u. Problem je sledeći : Pokazati da uvek postoji linearna diferencijalna jednačina Fuksijeve klase,sa datim singularnim tačkama i monodromskom grupom. Problem zahteva proizvodnju n funkcija promenljive z, regularne kroz kompleksnu z-ravan, osim u datim singularnim tačkama; u ovim tačkama funkcije mogu postati beskonačne samo kočnog reda , a kada z opisuje krugove oko tih tačaka , funkcije će proći propisane linearne supstitucije. Pokazalo se da je postojanje takvih diferencijalnih jednačina verovatno računanjem konstanti,ali rigorozni dokaz je do sada samo za poseban slučaj kada fundamentalne jednačine datih zamena imaju korenje u apsolutnom jedinstvu veličine. L.Schlesingler je dao ovaj dokaz, zasnovan na Poincareevoj teoriji Fuksove zeta-funkcije. Bilo bi dobro ukoliko bi teorija linearnih diferencijalnih jednačina imala način da problem bude rešiv nekom opštom metodom.

[27]E.E. Rosinger, "Non-linear partial differential equations", North-Holland (1990) MR1091547

[28]M. Oberguggenberger, E.E. Rosinger, Šolutions of continuous nonlinear PDE's through order completion. Part I"Univ. Pretoria (1991)

[29]E.E. Rosinger, "Parametric Lie group actions on global generalised solutions of nonlinear PDEs", Kluwer Acad. Publ. (1998) MR1658516

21.2 Definicije

Zapravo bilo bi prikladnije ne pričati o diferencijalnim jednačinama nego o linearom sistemu diferencijalnih jednačina : da bi mogla da se ostvari bilo koja monodromska grupa preko diferencijalne jednačine generalno treba priznati prisustvo dodatnih vidljivih singulariteta, kao što su na primer singulariteti sa trivijalnim lokalnim monodromom. Modernije rečeno, (sistem) diferencijalnih jednačina koje se dovode u pitanje su one koje su definisane u kompleksnoj ravni i sa regularnim singularitetima. Ozbiljnija verzija problema podrazumevala bi da ovi singulariteti budu Fuchsian,npr. polovi prvog reda (logaritamski pol). Monodromska grupa je unapred propisana, po konačno dimenzijalnoj kompleksnoj reprezentaciji fundamentalne grupe komplementa u Rimanovoj sferi koja je od tih tačaka, i još u takči beskonačnosti, do ekvivalencije. Fundamentalna grupa je zapravo slobodna grupa, na 'krugovima' koji idu jednom oko svake tačke koja nedostaje, počevši i završavajući se u datoj baznoj tački. Pitanje je samo da li je mapiranje ovih Fuksijanovih jednačina do klasa reprezentacije surjekcija.

21.3 Istorija

Problem se najčešće naziva Riemann–Hilbertov problem. Danas postoji i moderna (D-modul) verzija, 'Riemann–Hilbertova korespodencija' u svim dimenzijama. Istorija dokaza koji koriste kompleksne promenljive je komplikovana.

Josip Plemelj je objavio rešenje 1908. i ovaj rad je dugo vremena bio prihvaćen kao definitivno rešenje; bilo je i radova G.D. Birkhoff-a 1913., ali je cela oblast,uključujući radove Ludwig Schlesinger-a na izomonodromskim deformacijama koje će tek mnogo kasnije biti povezivane sa teorijom solitona, izašla iz mode..

Plemelj (1964.) je napisao monograf koji je sumirao sav njegov rad. Nekoliko godina kasnije je sovjetski matematičar Yuliy S. Il'yashenko uz još neke probudio neke sumnje oko Plemeljevog rada. Pljemelj je tačno dokazao da bilo koja monodromska grupa može da bude ostvarena preko regularnog linearnog sistema koji je Fuksian za sve osim jedne singularne tačke. Pljemeljeva tvrdnja da sistem može biti stvoren da bude Fuchsian na poslednjoj tački je bila pogrešna. (Il'yashenko je pokazao da ako jedna od monodromskih operacija može biti dijagonalizovana, onda bi Plemeljeva tvrdnja bila tačna.)

1990. je Andrey A. Bolibrukh našao kontraprimer Plemeljevoj izjavi. Ovo se često videlo kao kontraprimer za precizno pitanje na koje je Hilbert mislio; Bolibrukh je pokazo da za datu polsku konfiguraciju neke monodromske grupe mogu biti realizovane kao regularne,ali ne preko Fuksijan sistema.

1990. je objavio detaljano učenje slučaja regularnih sistema veličine 3 pokazujući sve situacije kod kojih kotraprimeri postoje. 1978. godine Dekkers je pokazao da za sistem veličine 2 Plemeljevo verovanje jeste tačno. Andrey A. Bolibrukh (1992.) i nezavisno Vladimir Kostov (1992.) su pokazali da za bilo koju veličinu, nesvodljiva monodromska grupa može biti ostvarena Fuksijanovim sistemom. Kodimenzija raznovrsnosti monodromskih grupa regularanog sistema veličine n sa $p+1$ polova koji ne mogu biti realizovani Fuksijanovim sistemima jednaka je $2(n-1)p$ (Vladimir Kostov (1992)).)

Parelelno sa ovime Grothendieck škola algebarske geometrije je postala zainteresovana za pitanje 'integrabilne veze albegarskih raznovrsnosti' , generalizujući teoriju linearnih diferencijalnih jednačina na Rimanove površine. Pierre Deligne je dokazao tačnu povezanost Riman-Hilbert u generalnom kontekstu (velika stvar je bila pokazati šta 'Fuchsian' znači). Uz rad Helmut Röhrl-a, ovaj slučaj je pokrio i jednu kompleksnu dimenziju.

21.4 Izomonodromska deformacija

U matematici, jednačine koje su povezane sa izomonodromskim deformacijama meromorfskog lineranog sistema običnih diferencijalnih jednačina su ajfundamentalne egzaktno nelinearne diferencijalne jednačine.

Rezultat toga jeste da njihova rešenja i osobine leže u srcu polja egzaktne nelinearnosti i integrabilnih sistema.

21.4.1 Fuksijanovi sistemi i Šlezingerove jednačine

Posmatrajmo Fuksijanov sistem linernih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Ai}{x-\lambda_i} Y$$

gde nezavisna promenljiva x uzima vrednosti kompleksnih projekcija linije $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, rešenje Y uzima vrednosti u $\mathbf{C}^n$ i A_i je konstantna matrica nxn. Stavljajući n nezavisnih rešenja u fundamentalnu matricu možemo gledati Y koje uzima vrednosti u $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$. Rešenja ovih jednačina imaju jednostavne polove u $x = \lambda_i$. Jednostavnosti radi, pretpostavićemo da nema kasnijih polova u beskonačnosti koja bi prevazišla uslov

$$\sum_{i=1}^{n} Ai = 0$$

21.4.2 Monodromski podaci

Sada, fiksirajmo osnovu b na Rimanovoj sferi daleko od polova. Analitičko nastavljanje rešenja Y oko bilo kog pola λ_i i nazad do osnovne tačke će nam stvoriti novo rešenje Y' definisano blizu b. Novo i staro rešenje su povezani monodromskom matricom M_i kako sleduje :

$Y' = YM_i$.

Mi onda imamo Riman-Hilbertov homomorfizam od fundamentalne grupe probijene sfere do monodromske reprezentacije:

$$\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \lambda_1, ..., \lambda_n) \to GL(n, \mathbf{C})$$

.

Promena osnove rezultata samo menja simultanom konjugacijom svih monodromskih matrica. Moduo simultano konjugovanih monodromskih matrica definiše monodromske podatke Funksijanovog sistema.

21.4.3 Povezanost sa 21. Hilbertovim problemom

Sada kada imamo monodromske podatke, možemo naći Fuksijanov sistem koji pokazuje ovu monodromiju ?

Ovo je jedna forma Hilbertovog problema. Mi ne razlikujemo koordinate x i $\widehat{x}$ koje su povezane Möbius transformacijomi ne pravimo razliku izmedju mera ekvivalencije Fuksijevog sistema - što znači da mi posmatramo A i

$$g^{-1}(x)Ag(x) - g^{-1}(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

kao ekvivalente za bilo koju holomorfnu meru transformacije $g(x)$. (Ipak je najprirodnije posmatrati Fuksijanov sistem geometrijski, kao nešto što povezuje jednostavne polove na trivijalni rang n vektorskog snopa nad Rimanovom sferom).

Za opšte monodromske podatke, odgovor na Hilberovo 21.pitanje je 'da' - kao što je prvo pokazao Josip Plemelj. Doduše, Plemelj je izostavio neke slučajeve i bilo je pokazano 1989. od stane Andrei Bolibrukh-a da ima slučajeva kada je odgovor 'ne'. Ovde smo se mi u potpunosti fokusirali na opšti slučaj.

22 Hilbertov 22. problem : Uniformizacija analitičkih relacija pomoću automorfnih funkcija

Rešiti probleme koji se javljaju u vezi sa Poincarevim dokazom mogućnosti uniformizacije proizvoljnih analitičkih relacija sa dve promenljive; rešiti problem uniformizacije algebarskih i drugih analitičkih relacija sa tri ili više kompleksnih promenljivih.

22.1 Iskaz probelma

Problem je izložen kako sledi : Kako je Poincaré bio to dokazao, uvek je moguće redukovati bilo koju algebarsku relaciju izmedju dve promenljive do uniformnosti korišćenjem automorfnih funkcija promenljivih. To je, ako je data neka algebarska jednačina sa dve promenljive, za ove promenljive uvek se mogu naći dve takve automorfne funkcije jedne promenljive čijim će zamenjivanjem biti dobijena algebarska jednačina kao indentitet. Generalizacija ove fundamentalne teoreme na bilo koju analitičku ne-algebarsku relaciju bilo da je ona izmedju dve promenljive ima podjednaku šansu za uspehom po Poincaré-u, mada na način koji je potpuno drugačiji od onog kojim se poslužio u specijalnom problemu koji je prvo pomenut. Od Poincaré-ovog dokaza za mogućnost smanjivanja proizvoljne analitičke relacije izmedju dve promenljive do uniformnosti, ipak, ne postaje očigledno da li rešavanje funkcija može biti determinisano poznavanjem nekih dodatnih uslova. Naime, nije pokazano da li dve pojedinačno vrednovane funkcije nove promenljive mogu biti izabrane tako da, dok ova promenljiva prelazi regularan domen tih funkcija, sve ukupne regularne tačke datog analitičkog polja su zapravo dostignute i predstavljene. Baš naprotiv, čini se da je ovo slučaj, prema Poincaré-ovim istraživanjima, da pored tačaka grana postoje i druge, generalno beskonačno mnogo drugih diskretnih prihvatljivih tačaka analitičkog polja, koji mogu biti nadjene samo stvaranjem novih promenljivih koje će dostići granične tačke funkcije. U pogledu fundamentalnog značaja Poincaré-ove formulacije pitanja, čini mi se da je veoma poželjno objašnjenje i rešavanje ove poteškoće.

U konjukciji sa ovim problemom se pojavljuje problem smanjivanja algebarske ili bilo koje druge analitičke relacije do uniformnosti za problem sa tri promenljive ili kompleksnije probleme koje se mogu rešiti za mnoge posebne slučajeve. Prema rešavanju ovoga, skorašnja istraživanja Picard-a o algebarskim funkcijama sa dve promenljive se trebaju posmatrati dobrodošlim i bitnim preliminarnim učenjima. [78]

22.2 Deo rešenja

Koebe je dokazao generalnu uniformizacionu teoriju,da ako je Rimanova površ homomorfna do otvorenog podskupa kompleksne sfere (ili ekvivalentno ako je svaka Jordanova kriva odvaja), onda je konformno ekvivalentna otvorenom podskupu kompleksne sfere.

22.2.1 Teorema uniformizacije

Teorema kaže da je svaka jednostavno povezana Rimanova površi konformno ekvivalentna jednoj od tri Rimanove površi : otvorenoj jedinici diska, kompleksnoj ravni, ili Rimanovoj sferi. Naročito implicira da svaka Rimanova površina priznaje Rimanovu metriku konstantne zakrivljenosti.

Uniformizaciona teorema je generalizacija Rimanove teoreme mapiranja od odgovarajućih jednostavno povezanih otvorenih podskupova planara do proizvoljno jednostavno povezanih Rimanovih površina. Uniformizaciona teorema ima i ekvivalentnu izjavu za slučaj zatvorenih Rimanovih 2-razdelnika : svaki takav razdelnik ima konformno ekvivalentu Rimanovu metriku sa konstantnom zakrivljenošću.

Trenutni status : problem je trenutno otvoren ; napredak su napravili Griffith i Bers.

23 Hilbertov 23. problem : razvijanje metoda računa varijacija

Za rezliku od ostalih 22 problema,23. nije specifičan problem nego je više podsticaj daljem razvijanju metoda računa varijacija. Njegova formulacija problema je siže teorije računa varijacije, sa nekim dodatnim komentarima koji pokazuju da nije bilo uloženo dovoljno rada u teoriju tokom kasnog 19. veka.

23.1 Originalni iskaz

Počinje sa sledećim :

Do sada, ja sam generalno spomenuo probleme kao definitivne i specijalne, ako su mogući... No, voleo bih da završim sa generalnim problemom, sa indikacijom grane matematike koja se više puta ponavljala u ovoj lekciji - koja, uprkos računjivom napredku, u poslednje vreme, kojem je doprineo Weierstrass, ne dobija generalno poštovanje koje,po mom mišljenju, zaslužuje - mislim na varijacioni račun.

23.2 Varijacioni račun

Varijacioni račun je polje matematičke analize koje se bavi maksimiziranjem i minimiziranjem funkcionala, koji se slikaju iz seta funkcija do realnih brojeva. Funkcionali su često izražavani kao definitivni integrali koji uključuju funkcije i njihove derivate. Interesovanje je u ekstremima funkcija koje prave funkcionale koji imaju minimalnu ili maksimalnu vrednost - ili stacionarne funkcije - one čija je mera promene funkcionala nula.

23.3 Napredovanje

Prateći izlaganje problema , David Hilbert, Emmy Noether, Leonida Tonelli, Henri Lebesgue i Jacques Hadamard, uz mnoge druge su napravili značajne doprinose varijacionom računu. Marston Morse je primenio varijacioni račun u onome što se sada zove Morsova teorija. Lev Potryagin, Ralph Rockafellar i F.H. Clarke su stvorili nove matematičke alatke za varijacioni račun u optimalnoj kotrolnoj teoriji. Alternativa varijacionom računu bila bi dinamičko programiranje Richard-a Bellman-a.

U originalnom zapisu, postojao je i 24. Hilbertov problem koji je tražio kriterijum jednostavnosti u matematičkim dokazima i razvoj teorije dokaza sa snagom da se dokaže da je dati dokaz najjednostavniji mogući, ali on nije objavljen kao deo liste sa ostala 23 Hilberova problema.

Literatura

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Continuum_hypothesis

[2] https://mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html

[3] http://people.math.sc.edu/nyikos/hilbert2.pdf

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_second_problem

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Gentzen%27s_consistency_proof

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/G%C3%B6del%27s_incompleteness_theorems

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Entscheidungsproblem

[8] https://mitadmissions.org/blogs/entry/hilberts-third-problem-a-story-of-threes/

[9] https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-00856-6_9

[10] https://warwick.ac.uk/fac/sci/masdoc/people/studentpages/students2013/egginton/essay0.3.pdf

[11] https://u.cs.biu.ac.il/~margolis/Sadna/Proofs%20rom%20the%20Book%203rd%20Ed..pdf

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_map

https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

[13] https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Hilbert_problems#Hilbert.27s_fourth_problem.

[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_fourth_problem

[15] https://arxiv.org/abs/1312.3172

[16] https://www.researchgate.net/publication/259240067_On_Hilbert's_fourth_problem

[17] https://bookstore.ams.org/gsm-153/18

[18] https://ncatlab.org/nlab/show/Hilbert%27s+fifth+problem

[19] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_fifth_problem

[20] https://terrytao.files.wordpress.com/2012/03/hilbert-book.pdf

[21] https://terrytao.wordpress.com/tag/hilberts-fifth-problem/

[22] https://www.researchgate.net/publication/323857185_Quantum_probability_and_Hilbert's_sixth_problem

[23] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_sixth_problem

[24] https://physics.stackexchange.com/questions/87239/what-happened-with-hilberts-sixth-problem-the-axiomatization-of-physics-a

[25] https://www.maths.ox.ac.uk/system/files/attachments/OxPDE_14.09.pdf

[26] https://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Hilbert%20ICM.pdf

[27] http://euclid.colorado.edu/~tubbs/courses/Chapter%20Four.pdf

[28] https://sr.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D0%B0%D1%80%D0%BB_%D0%95%D1%80%D0%BC%D0%B8%D1%82

[29] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems

[30] https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis

[31] https://youtu.be/d6c6uIyieoo

[32] https://youtu.be/sD0NjbwqlYw

[33] https://youtu.be/VTveQ1ndH1c

[34] https://www.britannica.com/science/Riemann-hypothesis

[35] https://mathworld.wolfram.com/RiemannHypothesis.html

[36] http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/DUM04.pdf

[37] https://sr.wikipedia.org/wiki/Teorija_polja_klasa

[38] https://en.wikipedia.org/wiki/Artin_reciprocity_law

[39] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_ninth_problem

[40] http://petnicamat.rs/wp-content/uploads/2018/06/Deseti-Hilbertov-problem.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_tenth_problem

[41] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_eleventh_problem

[42] https://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_form

[43] https://en.wikipedia.org/wiki/Hasse_principle

[44] https://en.wikipedia.org/wiki/Hasse%E2%80%93Minkowski_theorem

[45] https://mathworld.wolfram.com/p-adicNumber.html

[46] https://www.emis.de/journals/SC/1998/3/pdf/smf_sem-cong_3_243-273.pdf

[47] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_twelfth_problem

[48] https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker%E2%80%93Weber_theorem

[49] https://en.wikipedia.org/wiki/Roots_of_unity

[50] https://Hilbert%20problems%20-%20Encyclopedia%20of%20Mathematics.html

[51] https://mathworld.wolfram.com/HilbertsProblems.html

[52] https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Hilbert_problems

[53] https://projecteuclid.org/euclid.aspm/1536853276

[54] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems

[55] http://emis.impa.br/EMIS/journals/SC/1998/3/pdf/smf_sem-cong_3_243-273.pdf

[56] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_thirteenth_problem

[57] M. d'Ocagne: Šur la résolution nomographique de l'équation du septième degré.Čomptes rendus Paris, 131 (1900), 522-524.

https://arxiv.org/pdf/0909.4561.pdf

[58] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_fourteenth_problem

[59] https://en.wikipedia.org/wiki/Zariski%27s_finiteness_theorem

[60] https://en.wikipedia.org/wiki/Quasi-projective_variety

[61] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_fifteenth_problem

[62] https://www.youtube.com/watch?v=U8sq3BplCfI

[63] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_sixteenth_problem

[64] (cf. Rohn, Flächen vierter Ordnung, Preissschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 1886)

[65] https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/hilbert/problems.html#16

[66] https://en.wikipedia.org/wiki/Harnack%27s_curve_theorem

[67] Žarko Mijajlović, Zoran Marković, Kosta Došen "Hilbertovi problemi i logika"Matematička biblioteka 48, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva - Beograd, 1986. , pp. 7-15,129-140

[68] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_seventeenth_problem

[69] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_eighteenth_problem

[70] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_nineteenth_problem

[71] https://web.ma.utexas.edu/mediawiki/index.php/De_Giorgi-Nash-Moser_theorem?fbclid=IwAR2wQduuGxisJksOMpPqancVV491Xv7tLq__wbv4Q-lXNwKRXb-ocR4dxTI

[72] De Giorgi, Ennio (1957), Šulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari", Memorie della Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematicahe e Naturali. (3) 3: 25–43

[73] Nash, John (1957), "Parabolic equations", Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 43: 754–758, ISSN 0027-8424

[74] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_twentieth_problem

[75] https://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_value_problem

[76] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_twenty-first_problem

[77] https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann%E2%80%93Hilbert_problem

[78] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_twenty-second_problem

[79] https://en.wikipedia.org/wiki/Uniformization_theorem

[80] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_twenty-third_problem