# Izračunavanje kvadratnog korena primenom Tjuringove mašine

Marko Arsenović 75/2018

## Uvod

U ovom radu bavićemo se izračunavanjem kvadratnog korena zadatog broja. Kako će polja Tjuringove mašine predstavljati svojevrsnu brojevnu polupravu, a zbog strukture koju poseduje ta mašina, najveći skup koji teoretski može da se predstavi jednom mašinom je prebrojiv beskonačan skup (skup racionalnih brojeva $Q$). Funkcija kvadratni koren slika domen $Q$ u $R$ ($f : Q^+ \to R$). S obzirom da je skup $R$ neprebrojivo beskonačan skup, Tjuringovom mašinom moći će samo da se proceni vrednost funkcije. Porastom preciznosti procene, raste i složenost programa za realizaciju rešenja. Stoga, na osnovu potreba treba minimalizovati kompleksnost programa Tjuringove mašine.

### Vavilonska metoda

Metoda koju ćemo koristiti zove se Vavilonska metoda. Ona se sastoji iz sledećih koraka:

1. izaberimo neki broj (nazvaćemo ga g);
2. podelimo ga sa brojem čiji koren tražiš (dobijeni broj nazvaćemo b);
3. nađimo sredinu g i b;
4. dobijeni broj označimo sa g i ponovimo postupak(od 2. koraka).

Osnovna ideja ovog postupka je da ukoliko je broj g veći od $y = \sqrt{x}$ onda će broj b biti manji od broja y. Sredinom brojeva g i b približavamo se stvarnoj vrednosti funkcije. Nakon samo nekoliko ponavljanja ovog algoritma, dobićemo procenu preciznu i do nekoliko decimalnih mesta.

# Realizacija programa

Kao što je već naglašeno, program zavisi od potrebe korisnika. U ovom zadatku biće realizovana vrednost funkcije nad domenom prirodnih brojeva, ali će takođe i biti predstavljena ideja kako napraviti program za potrebe veće preciznosti programa. Sve prethodno nas dovodi do zaključka da će sastavljeni program rešavati ceo deo kvadratnog korena prirodnih brojeva.

## Početni uslovi

Početni izgled Tjuringove mašine je sledeći:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | 1 | p | 1 | ... | g | ... | B | x | B | B | ... |
| ↑ | ↑ | | ↑ | | ↑ | | | | ↑ | | | ↑ |
| $d_1$ | $d_2$ | | $d_3$ | | $d_4$ | | | | $d_5$ | | | $d_7$ |

$d_1$ - beskonačno mnogo blanko znaka na levu stranu

$d_2$ - unarni brojač na levo, početno stanje pokazivača TM

$d_3$ - marker koji označava početak brojevne poluprave, može se posmatrati i kao broj nula

$d_4$ - unarna vrednost broja g (koju mi zadajemo), poslednja jedinica zamenjena sa g (označava vrednost broja g na broejvnoj polupravoj)

$d_5$ - vrednost broja x (čiji koren tražimo)

$d_6$ - beskonačno mnogo blanko znaka na desnu stranu

Azbuka će se sastojati od sledećih oznaka: $S = \{B, 1, p, x, x_1, y, g, g_1\}$.
Radi preglednosti program će se sastojati samo od očekivanih stanja. Stanja nastala usled neke greške neće bitinapisana u ovom zadatku i podrazumavaju se. Prilikom pravljenja ilustracija rada TM preskočeni su prenosni koraci i ilustrovani samo ključni.

### Potprogrami

Crvena polja predstvljaju promenu u odnosu na prethodni korak. Stanje $q_n$ predstavlja stanje u kojem će glavni program izaći iz potprogrma i nastaviti sa radom. Ono se definiše prilikom poziva potprograma. Stanje $q_+$ predstavlja rešenje zadatka. Potprogram se poziva stanjem koje odgovara njegovom slovu.

## Prvi korak

Prvi korak je nalaženje količnika broja x i trenutnog broja g. Ovde je ideja da se proveri koliko puta broj g može da stane u broj x. Svaki put kada se prebaci cela vrednost broja g, dodaje se 1 na unarni brojač pre početka brojevne poluprave. Pošto je svako g manje od x, uvek će brojač biti najmanje 1. Zbog toga je i početna vrednost na brojaču 1. Znajući to, prebacivanje broja uvek krećemo od g, a ne od B. Ova ideja realizuje se tako što se ispune polja od p do g jedinicama. Nakon toga prebacujemo jednu po jednu posle g i ako su sve jedinice prebačene, dodaje se 1 na brojčanik.

## Potprogram *a*

Potprogram deljenje ilustrovan na primeru deljanja 6 sa 3:

**Tjuringova mašina**

| B | 1 | p | 1 | 1 | g | B | B | x | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ↑ | | | | | | | |

| B | 1 | p | 1 | 1 | g | B | B | x | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | ↑ | | | | | | |

| B | 1 | p | B | 1 | g | B | B | x | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | ↑ | | | |

| B | 1 | p | B | 1 | g | 1 | B | x | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | ↑ | | | | | |

| B | 1 | p | B | B | g | 1 | B | x | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | ↑ | | |

| B | 1 | p | B | B | g | 1 | 1 | x | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | ↑ | | | | |

| B | 1 | p | B | B | $g_1$ | 1 | 1 | x | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | ↑ | |

| B | 1 | p | B | B | $g_1$ | 1 | 1 | $x_1$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | ↑ | | | | |

| B | 1 | p | 1 | 1 | g | 1 | 1 | $x_1$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↑ | | | | | | | | | |

| 1 | 1 | p | 1 | 1 | g | 1 | 1 | $x_1$ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ↑ | | | | | | | |

**potprogram**

f($q_0$,p)=($q_1$,p,+1)
f($q_1$,1)=($q_2$,B,+1)
f($q_1$,g)=($q_3$,$g_1$,+1)
f($q_1$,$g_1$)=($q_5$,g,-1)
f($q_2$,1)=($q_2$,1,+1)
f($q_2$,g)=($q_3$,g,+1)
f($q_3$,1)=($q_3$,1,+1)
f($q_3$,B)=($q_4$,1,-1)
f($q_3$,x)=($q_4$,$x_1$,-1)
f($q_3$,$x_1$)=($q_n$, x,-1)
f($q_4$,1)=($q_4$,1,-1)
f($q_4$,g)=($q_4$,g,-1)
f($q_4$,B)=($q_1$,B,+1)
f($q_5$,B)=($q_5$,1,-1)
f($q_5$,p)=($q_6$,p,-1)
f($q_6$,1)=($q_6$,1,-1)
f($q_6$,B)=($q_7$,1,+1)
f($q_7$,1)=($q_7$,1,+1)
f($q_7$,p)=($q_1$,p,+1)

## Drugi korak

U drugom koraku ispisuje se vrednost količnika brojeva x i g. Ideja ovog dela je da prebacimo jedinice iz unarnog brojčanika na brojevnu polupravu, a da pri tome ostavimo brojčanik na vrednosti 1 (jer će količnik uvek biti ≥1). Kraj broja će takođe biti označen sa g, s obzirom da ćemo u sledećem koraku tražiti njihovu sredinu i nije bitno koji broj je prethodni *guess* a koji je količnik dva broja.

## Potprogram *b*

Potprogram ilustrovan na ispisivanju broja 3 (pri tome je prethodni *guess* 1 ):

**Tjuringova mašina**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | 1 | 1 | p | g | B | B | B | B | x |
| | | | ↑ | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | 1 | 1 | p | g | B | B | B | B | x |
| | ↑ | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | 1 | 1 | p | g | B | B | B | B | x |
| | | | | | ↑ | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | 1 | 1 | p | $g_1$ | B | B | B | B | x |
| | | ↑ | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | 1 | p | $g_1$ | B | B | B | B | x |
| | | | | | | ↑ | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | 1 | p | $g_1$ | 1 | B | B | B | x |
| | | | ↑ | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | p | $g_1$ | 1 | B | B | B | x |
| | | | | ↑ | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | p | $g_1$ | 1 | B | B | B | x |
| | | | ↑ | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | 1 | p | $g_1$ | 1 | B | B | B | x |
| | | | | | | | ↑ | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | 1 | p | $g_1$ | 1 | g | B | B | x |
| | | | | | | ↑ | | | | |

**potprogram**

$f(q_0,1)=(q_1,1,-1)$
$f(q_1,1)=(q_1,1,-1)$
$f(q_1,B)=(q_2,B,+1)$
$f(q_2,1)=(q_3,B,+1)$
$f(q_3,1)=(q_4,1,+1)$
$f(q_3,p)=(q_7,p,-1)$
$f(q_4,1)=(q_4,1,+1)$
$f(q_4,p)=(q_5,p,+1)$
$f(q_5,1)=(q_5,1,+1)$
$f(q_5,g)=(q_6,g_1,-1)$
$f(q_5,g_1)=(q_5,g_1,+1)$
$f(q_5,B)=(q_6,1,-1)$
$f(q_6,g_1)=(q_6,g_1,-1)$
$f(q_6,1)=(q_6,1,-1)$
$f(q_6,p)=(q_1,p,-1)$
$f(q_7,B)=(q_8,1,+1)$
$f(q_8,p)=(q_8,p,+1)$
$f(q_8,1)=(q_8,1,+1)$
$f(q_8,B)=(q_9,g,+1)$
$f(q_8,g)=(q+,y,+1)$
$f(q_8,g_1)=(q_{11},g_1,+1)$
$f(q_9,g)=(q_{10},g,-1)$
$f(q_9,B)=(q_n,B,-1)$
$f(q_{10},g)=(q+,y,+1)$
$f(q_{11},1)=(q_{11},1,+1)$
$f(q_{11},B)=(q_{12},g,-1)$
$f(q_{11},x)=(q_n,x_1,-1)$
$f(q_{12},g_1)=(q+,y,+1)$
$f(q_{12},1)=(q_n,1,-1)$

Komentar: U stanju $q_8$ se prolazi kroz jedinice na brojevnoj polupravoj. Ukoliko je poslednja jedinica tačno 1 polje pre g, to znači da je količnik jednak g i da je stigao do rešenja problema. Ukoliko stigne do $g_1$ u stanju $q_8$, put se nastavlja do najbliže B. Tada se proverava u stanju $q_12$ da li su g i $g_1$ jedno do drugog jer je i u tom slučaju program stigao do najpreciznijeg mogućeg rešenja i program tu završava sa radom. U situaciji kada je g=1(ako za početni uslov odredimo da je g=1), količnik će biti x i tada ga obeležavamo sa $x_1$.

## Treći korak

Treći korak sastoji se iz pronalaženja sredine prethodnog g i količnika koji smo obeležili sa g (može biti i $x_1$). Ovaj problem rešava se popunjavanem polja između dva broja jedinicama i nakon toga pretvaranje po jedne B sa svake strane dok ne ostane središnji član.

### Primer

Tražićemo sredinu parova brojeva (1,7) i (1,6):

**1 i 7**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | | | ↑ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | B |
| | | | ↑ | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | B |
| | | | | | | | | ↑ | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | 1 | 1 | 1 | 1 | B | B |
| | | | | ↑ | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | 1 | 1 | 1 | B | B |
| | | | | | | | ↑ | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | 1 | 1 | B | B | B |
| | | | | | ↑ | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | B | 1 | B | B | B |
| | | | | | | ↑ | | | |

**1 i 6**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | B |
| | | | | | | | | ↑ | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | B | B |
| | | | ↑ | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | 1 | 1 | 1 | 1 | B | B |
| | | | | | | | ↑ | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | 1 | 1 | 1 | B | B | B |
| | | | | ↑ | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | 1 | 1 | B | B | B |
| | | | | | | ↑ | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | 1 | B | B | B | B |
| | | | | | ↑ | | | | |

Pošto je zadatak pronalaženje celog dela broja, prilikom pronalaženje sredine, ukoliko ostanu dva središnja broja, uzima se manji. To se najlakše postiže tako što eliminacija jedinica krene od broja sa većom vrednošću.

## Potprogram $c$

Potprogram ilustrovan na traženju sredine 1 i 7:

**Tjuringova mašina**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | g | B | B | B | B | g | B |
| | | | ↑ | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | g | B | B | B | B | g | B |
| | | | | ↑ | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | g | 1 | 1 | 1 | 1 | g | B |
| | | | | | | | | | ↑ | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | g | 1 | 1 | 1 | 1 | B | B |
| | | | | ↑ | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | 1 | 1 | 1 | 1 | B | B |
| | | | | | | | | ↑ | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | 1 | 1 | 1 | B | B | B |
| | | | | | ↑ | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | B | 1 | 1 | B | B | B |
| | | | | | | | ↑ | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | B | 1 | B | B | B | B |
| | | | | | ↑ | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | B | B | B | B | B | B |
| | | | | | | ↑ | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | 1 | p | B | B | B | g | B | B | B | B |
| | | | | | | ↑ | | | | |

**potprogram**

$$\mathrm{f}(q_0,\mathrm{B})=(q_1,\mathrm{B},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_0,\mathrm{g})=(q_2,\mathrm{g},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_1,\mathrm{B})=(q_1,\mathrm{B},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_1,\mathrm{g})=(q_2,\mathrm{g},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_2,\mathrm{B})=(q_2,1,+1)$$
$$\mathrm{f}(q_2,\mathrm{g})=(q_3,\mathrm{B},-1)$$
$$\mathrm{f}(q_2,\mathrm{x}_1)=(q_3,\mathrm{x},-1)$$
$$\mathrm{f}(q_3,1)=(q_3,1,-1)$$
$$\mathrm{f}(q_3,\mathrm{g})=(q_5,\mathrm{B},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_3,\mathrm{B})=(q_4,\mathrm{B},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_4,1)=(q_5,\mathrm{B},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_5,1)=(q_6,1,+1)$$
$$\mathrm{f}(q_5,\mathrm{B})=(q_9,\mathrm{B},-1)$$
$$\mathrm{f}(q_6,1)=(q_6,1,+1)$$
$$\mathrm{f}(q_6,\mathrm{B})=(q_7,\mathrm{B},-1)$$
$$\mathrm{f}(q_7,1)=(q_8,\mathrm{B},-1)$$
$$\mathrm{f}(q_8,1)=(q_3,1,-1)$$
$$\mathrm{f}(q_8,\mathrm{B})=(q_9,\mathrm{B},+1)$$
$$\mathrm{f}(q_9,\mathrm{B})=(q_n,\mathrm{g},-1)$$

Potprogram proverava u stanjima $q_5$ i $q_8$ da li je, nakon što promeni 1 u B, sledeće polje 1, ukoliko nije to je znak da je prethodno polje sredina dva broja u i stanju $q_9$ tu sredinu i obeležava sa g.

## Glavni program

Konačno, glavni program, sastavljen od manjih potprograma i dodatnih funkcija koje sređuju Tjuringovu mašinu da ima potreban početni izgled za svaki od potprograma:

$$\text{f}(q_0,1)=(q_a,1,+1)(q_n=q_1)$$
$$\text{f}(q_1,1)=(q_1,\text{B},-1)$$
$$\text{f}(q_1,\text{g})=(q_1,\text{g},-1)$$
$$\text{f}(q_1,\text{B})=(q_1,\text{B},-1)$$
$$\text{f}(q_1,\text{p})=(q_b,\text{p},-1)(q_n=q_2)$$
$$\text{f}(q_2,1)=(q_2,\text{B},-1)$$
$$\text{f}(q_2,\text{g})=(q_2,\text{g},-1)$$
$$\text{f}(q_2,\text{g}_1)=(q_3,\text{g},-1)$$
$$\text{f}(q_2,\text{p})=(q_c,\text{p},+1)\ (q_n=q_3)$$
$$\text{f}(q_3,\text{B})=(q_3,1,-1)$$
$$\text{f}(q_3,\text{p})=(q_4,\text{p},-1)$$
$$\text{f}(q_4,1)=(q_a,1,+1)(q_n=q_1)$$

## Precizniја rešenja

Ideja za precizniji program je ta da je vrednost svakog polja na brojevnoj polupravoj $2^{-n}$ za n$\in N$. Urađen zadatak je uzimao vrednost n=0. Takođe bio bi potreban binaran brojač između p i unarnog brojača. Naime, kada program završi deljenje x sa g, program bi našao polovinu g i onda proverio da li je polovina vrednosti g dodana na celobrojni umnozak g manja od vrednosti x. Ukoliko jeste, na poslednjem polju binarnog brojača bi se upisala jedinica. Isti proces bi se ponovio i za ostale delove g: $\frac{g}{2^a}$, $a=\{1,2,...n\}$. TM bi izgledala nešto nalik ovome:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | B | 1 | b | B | ... | B | p | 1 | ... | g | ... | B | x | B | B | ... |
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | | $\uparrow$ | | $\uparrow$ | | | | $\uparrow$ | | | $\uparrow$ |
| $d_1$ | $d_2$ | | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | | $d_6$ | | $d_7$ | | | | $d_8$ | | | $d_9$ |

$d_1$ - beskonačno mnogo B na levu stranu
$d_2$ - unarni brojač na levo
$d_3$ - marker koji označava početak unarnog brojača(na levo, za celobrojnu vrednost količnika) i binarnog brojača(na desno)
$d_4$ - prva cifra brojača, za vrednost 0,5
$d_5$ - ostatakk cifara brojača, ukupno n
$d_6$ - početak brojevne poluprave
$d_7$ - unarna vrednost broja g, poslednja cifra zamenjena sa 1
$d_8$ - vrednost x na brojevnoj polupravoj
$d_9$ - beskonačno B na desno

# Literatura


1. Clarendon Press, 1921, ″A History of Greek Mathematics″
2. „Složenost algoritama i odabrane metode optimizacije", Branko Malešević, Ivana Jovović
3. https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Turing_machine