Semestralni rad iz Diskretne matematike

Simpleks metoda

Alma Jahić 2018/37 i Veljko Ilić 2017/611

16. septembar 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Za probleme linearnog programiranja koji uključuju dve promenljive, geometrijski metod rešavanja problema je pogodan. Međutim, za probleme koji uključuju više od dve promenljive ili probleme koji uključuju veliki broj ograničenja, bolje je koristiti metode koje su prilagodljive računaru. Jedna takva metoda naziva se **simpleks metoda**, koju je otkrio George Dantzig 1946. godine.

Simpleks metoda se zasniva na tri bitna principa:

1. Postoji mogućnost određivanja bar jednog dopustivog rešenja (plana), koji se često naziva baz̆ičnim planom ili dopustivim baz̆ičnim planom.

2. Postoji mogućnost da se proveri da li je bazični dopustivi plan optimalan ili ne.

3. Postoji mogućnost da se, u slučaju da dopustivi plan nije optimalan, izabere novi koji je bliži optimalnom.

Prema gore navedenom, simpleks metoda se zasniva na sukcesivnom poboljšanju početnog dopustivog plana, sve dok se ne dobije optimalan plan. Algoritam simpleks metoda takođe omogućava da se ustanovi da li je zadatak rešiv ili ne, odnosno, da li postoji protivurečnost u ograničenjima.

2 Maksimizacija

Problem linearnog programiranja je u standardnoj formi ako zahteva maksimizaciju linearne funkcije cilja $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ podložne ograničenjima

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \end{aligned}$$

gde $x_i \geqslant 0$ i $b_i \geqslant 0$. Pošto je leva strana svake *nejednačine* manja ili jednaka desnoj, moraju postojati nenegativni brojevi $s_1, s_2, ..., s_m$ koji se mogu dodati levoj strani svake jednačine kako bi se dobio sledeći sistem linearnih *jednačina*.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + s_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + s_m &= b_m \end{aligned}$$

Brojevi $s_1, s_2, \ldots, s_m$ se nazivaju veštačke promenljive.

Primer 1 Predstavićemo ovu metodu na jednom primeru. Pretpostavimo da želimo da pronađemo maksimalnu vrednost $z = 4x_1 + 6x_2$, gde $x_1 \geqslant 0$ i $x_2 \geqslant 0$ uz sledeća ogrančenja.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leqslant 11 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 27 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leqslant 90 \end{aligned}$$

Nakon dodavanja veštačkih promenljivih, odgovarajući sistem jednačina linearnih ograničenja izgleda ovako:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + s_1 &= 11 \\ x_1 + x_2 + s_2 &= 27 \\ 2x_1 + 5x_2 + s_3 &= 90 \end{aligned}$$

gde $s_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3$.

Bazično rešenje problema linearnog programiranja u standardnoj formi je rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_n, s_1, s_2, \ldots, s_m)$ jednačina ograničenja u kojima *najviše* m varijabli ima nenultu vrednost - nenulte promenljive se nazivaju **bazične promenljive**. Bazično rešenje za koje su sve promenljive nenegativne, naziva se **dopustivi bazični plan**.

2.1 Simplex tablica

Simplex metoda se izvodi osnovnim operacijama sa vrstama matrice koju nazivamo **simplex tablica**. Ovu tablicu čine proširena matrica koja odgovara jednačinama ograničenja zajedno sa koeficijentima funkcije cilja napisane u sledećoj formi

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + (0)s_1 + (0)s_2 + \ldots + (0)s_m = z$$

U tablici je uobičajeno izostaviti koeficijente funkcije z. Da vidimo kako to izgleda na našem primeru.

Ciljna funkcija:

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

Ograničenja:

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 11$$
$$x_1 + x_2 + s_2 = 27$$
$$2x_1 + 5x_2 + s_3 = 90$$

Simplex tablica za ovaj problem je

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
-1	1	1	0	0	11	s_1
1	1	0	1	0	27	s_2
2	5	0	0	1	90	s_3
-4	-6	0	0	0	0	
					↑ trenutna vrednost z	

Za ovu **početnu simplex tablicu**, **bazične promenljive** su s_1, s_2 i s_3, a **nebazične promenljive** (koje imaju vrednost nula) su x_1 i x_2. Dakle, iz poslednje dve kolone vidimo da je trenutno rešenje

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 11, s_2 = 27, s_3 = 90$$

Rešenje je dopustivo bazično rešenje i često se piše

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 11, 27, 90).$$

Broj koji se nalazi u donjem desnom uglu simplex tablice predstavlja trenutnu vrednost z. Primetiti da su brojevi u donjoj vrsti ispod x_1 i x_2 negativi koeficijenti od x_1 i x_2 u funkciji cilja

$$z = 4x_1 + 6x_2.$$

Da bismo **proverili optimalnost** rešenja predstavljenog simplex tablicom, gledamo brojeve u donjem redu tablice. Ako je bilo koji od ovih unosa negativan (kao u našem primeru), tada trenutno rešenje *nije* optimalno.

2.2 Pivotiranje

Sada kada smo postavili početnu simplex tablicu za problem linearnog programiranja, simpleks metoda se sastoji od provere optimalnosti, a zatim, ako trenutno rešenje nije optimalno, poboljšavanja trenutnog rešenja. (Poboljšano rešenje je rešenje koje ima veću z-vrednost od trenutnog rešenja.) Da bismo poboljšali trenutno rešenje, donosimo novu baznu promenljivu u rešenje - ovu promenljivu nazivamo **ulaznom promenljivom**. To implicira da jedna od trenutnih osnovnih promenljivih mora biti izbačena, inače bismo imali previše promenljivih za bazično rešenje - ovu varijablu nazivamo **izlaznom promenljivom**. Biramo ulazne i izlazne promenljive na sledeći način:

1. **Ulazna promenljiva** odgovara najmanjem (najnegativnijem) broju u donjem redu tablice.
2. **Izlazna promenljiva** odgovara najmanjem nenegativnom odnosu b_i/a_{ij}, u koloni određenoj ulaznom promenljivom.
3. Broj u simplex tabeli u koloni ulazne promenljive i vrsti izlazne promenljive naziva se **stožer**.

Konačno, da bismo formirali poboljšano rešenje, na kolonu koja sadrži stožer primenjujemo Gaus-Žordanovu eliminaciju, kao što je prikazano u sledećem primeru. (Ovaj proces se zove **pivotiranje**.)

Primer 1 Koristeći simpleks metodu pronađimo poboljšano rešenje problema linearnog programiranja predstavljenog na sledećoj tabeli.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
-1	1	1	0	0	11	s_1
1	1	0	1	0	27	s_2
2	5	0	0	1	90	s_3
-4	-6	0	0	0	0	

Ciljna funkcija za ovaj problem je $z = 4x_1 + 6x_2$.

Rešenje Primetiti da trenutno rešenje $(x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 11, s_2 = 27, s_3 = 90)$ odgovara vrednosti z=0. Da bismo poboljšali ovo rešenje, zaključujemo da je ulazna promenljiva x_2, jer je -6 najmanji unos u donjem redu.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
-1	1	1	0	0	11	s_1
1	1	0	1	0	27	s_2
2	5	0	0	1	90	s_3
-4	-6	0	0	0	0	
	$\uparrow$					
	ulazna					

Da bi bilo jasno zašto biramo s_2 kao ulaznu varijablu, treba se setiti se da je $z = 4x_1 + 6x_2$. Jedinična promena vrednosti x_2 proizvodi 6 puta veću promenu z vrednosti, dok jedinična promena vrednosti x_1 proizvodi samo 4 puta veću promenu vrednosti z. Da bismo pronašli izlaznu promenljivu, pronalazimo one koji imaju odgovarajuće pozitivne elemente u kolonama ulaznih promenljivih i formiramo sledeće odnose:

$$\frac{11}{1} = 11, \frac{27}{1} = 27, \frac{90}{5} = 18$$

Najmanja pozitivna razmera je 11, dakle biramo s_1 za izlaznu promenljivu.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
-1	1	1	0	0	11	$s_1 \leftarrow$ *izlazna*
1	1	0	1	0	27	s_2
2	5	0	0	1	90	s_3
-4	-6	0	0	0	0	
	$\uparrow$					
	ulazna					

Primetiti da je stožer(pivot) vrednost koja se nalazi u preseku prvog reda i druge kolone. Sada koristimo Gaus-Žordanovu eliminaciju za dobijanje sledećeg poboljšanog rešenja.

$$\begin{array}{c} \textit{pre pivotiranja} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 27 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 90 \\ -4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textit{nakon pivotiranja} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 16 \\ 7 & 0 & -5 & 0 & 1 & 35 \\ -10 & 0 & 6 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix} \end{array}$$

Nova tablica sada izgleda ovako:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
-1	1	1	0	0	11	s_1
2	0	-1	1	0	16	s_2
7	0	-5	0	1	35	s_3
-10	0	6	0	0	66	

Poboljšano rešenje i z vrednost su sada

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 11, 0, 16, 35)$$

$$z = 4x_1 + 6x_2 = 4(0) + 6(11) = 66$$

Ovo poboljšano rešenje još uvek nije optimalno jer donja vrsta i dalje sadrži negativnu vrednost. Prema tome možemo primeniti još jednu iteraciju simplex metode kako bismo dodatno popravili naše rešenje na sledeći način. Biramo x_1 kao ulaznu promenljivu. Štaviše, najmanji nenegativni odnos od $11/(-1) = -11, 16/2 = 8$ i $35/7 = 5$ iznosi 5, pa je s_3 izlazna promenljiva. Gaus-Žordanovom eliminacijom dobijamo sledeće:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 16 \\ 7 & 0 & -5 & 0 & 1 & 35 \\ -10 & 0 & 6 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 5 \\ -10 & 0 & 6 & 0 & 0 & 66 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 16 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & 1 & -\frac{2}{7} & 6 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 & \frac{1}{7} & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{7} & 0 & \frac{10}{7} & 116 \end{bmatrix}$$

Prema tome, simplex tablica izgleda ovako:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
0	1	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	16	x_2
0	0	$\frac{3}{7}$	1	$-\frac{2}{7}$	6	s_2
1	0	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	5	x_1
0	0	$-\frac{8}{7}$	0	$\frac{10}{7}$	116	

U ovoj tablici još uvek postoji negativna vrednost u donjem redu. Tako da biramo s_1 kao ulaznu promenljivu i s_2 kao izlaznu promenljivu, kao što je prikazano u sledećoj tablici.

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
0	1	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	16	x_2
0	0	$\frac{3}{7}$	1	$-\frac{2}{7}$	6	$s_2 \leftarrow$ *izlazna*
1	0	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	5	x_1
0	0	$-\frac{8}{7}$	0	$\frac{10}{7}$	116	
		$\uparrow$ *ulazna*				

Izvođenjem još jedne iteracije simplex metode, dobijamo sledeću tablicu:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*bazične promenljive*
0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	12	x_2
0	0	1	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	14	s_1
1	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	15	x_1
0	0	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	132	

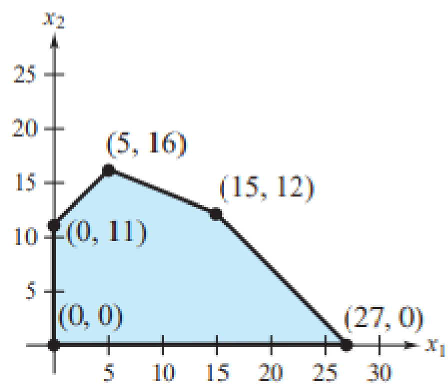
U ovoj tabeli ne postoje negativni elementi u donjoj vrsti. Stoga smo odredili optimalno rešenje

$$(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (15, 12, 14, 0, 0)$$

sa

$$z = 4x_1 + 6x_2 = 4(15) + 6(12) = 132.$$

Pošto ovaj problem linearnog programiranja uključuje samo dve promenljive, mogli smo koristiti i metod grafičkog rešavanja problema, kao što je prikazano na slici ispod.



Primetiti da svaka iteracija u simplex metodi odgovara pomeranju sa jedne tačke preseka pravih do druge!

$$\begin{matrix}(0,0) \\ z = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}(0,11) \\ z = 66\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}(5,16) \\ z = 116\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}(15,12) \\ z = 132\end{matrix}$$

2.3 Simplex metoda

A sada ćemo rezimirati korake koje obuhvata simplex metoda.

Standardna forma simplex metode Za rešavanje problema linearnog programiranja u standardnoj formi pratiti sledeće korake:

1. Pretvoriti svaku nejednačinu u skupu ograničenja u jednačinu dodavanjem veštačkih (slack) promenljivih.
2. Kreirajte početnu simplex tablicu.
3. Pronađite najnegativniji unos u donjoj vrsti. Kolona za ovaj unos se naziva **ulazna kolona**.
4. Formirajte odnose unosa u „b-koloni“ sa odgovarajućim pozitivnim vrednostima u ulaznoj koloni. Izlazna vrsta odgovara najmanjem nenegativnom odnosu b_i/a_{ij}. (Ako su sve vrednosti u ulaznoj koloni 0 ili negativni, tada ne postoji maksimalno rešenje.) Vrednost koja se nalazi u preseku izlaznog reda i ulazne kolone se naziva **stožer (pivot)**.
5. Elementarnim operacijama transformisati vrstu tako da pivot bude jednak 1, a sve ostale vrednosti u ulaznoj koloni jednake 0. Ovaj postupak se naziva **pivotiranje**.

6. Ako su svi unosi u donjoj vrsti nula ili pozitivni, to je konačna tablica. Ako ne, vratiti se nazad na korak 3.
7. Ako dobijete konačnu tablicu, tada problem linearnog programiranja ima maksimalno rešenje, koje predstavlja vrednost u donjem desnom uglu tablice.

Primetiti da je bazično dopustivo rešenje inicijalne simplex tablice sledeće:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, s_1, s_2, \ldots, s_m) = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Ovo rešenje je bazično jer najviše m promenljivih ima nenultu vrednost (veštačke promenljive).

2.4 Primer 2 - Primena simplex metode u biznisu

Jedna kompanija ima mogućnost reklamiranja putem televizije, novina i radija. Troškovi i procene pokrivenosti auditorijuma date su u tabeli ispod.

	Televizija	*Novine*	*Radio*
Cena po reklami	\$ 2,000	\$ 600	\$ 300
Gledanost po reklami	100,000	40,000	18,000

Lokalni list ograničava broj reklama u jednoj nedelji od jedne kompanije do najviše deset. Štaviše, kako bi se uravnotežilo oglašavanje između tri vrste medija, na radiju ne bi trebalo da se pojavi više od polovine konačnog broja reklama, a najmanje 10% trebalo bi da se pojavi na televiziji. Sedmični budžet za oglašavanje iznosi \$18.200. Koliko reklama treba da se objavi u svakom od tri vrste medija kako bi se maksimizirala ukupna gledanost?

Rešenje Za početak, označićemo sa x_1, x_2 i x_3 broj reklama na televiziji, novinama i radiu, respektivno. Funkcija cilja izgleda ovako:

$$z = 100,000x_1 + 40,000x_2 + 18,000x_3$$

gde je $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ i $x_3 \geqslant 0$.
Ograničenja za ovaj problem su sledeća:

$$\begin{aligned} 2000x_1 + 600x_2 + 300x_3 &\leqslant 18,200 \\ x_2 &\leqslant 10 \\ x_3 &\leqslant 0.5(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_1 &\geqslant 0.1(x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Pogidnija forma ovog sistema izgleda ovako:

$$\begin{aligned} 20x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\leqslant 182 \\ x_2 &\leqslant 10 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 0 \\ -9x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Prema tome, ovako izgleda inicijalna simplex tablica:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b	*bazične promenljive*
20	6	3	1	0	0	0	182	$s_1 \leftarrow$ *izlazna*
0	1	0	0	1	0	0	10	s_2
-1	-1	1	0	0	1	0	0	s_3
-9	1	1	0	0	0	1	0	s_4
-100,000	-40,000	-18,000	0	0	0	0	0	
		$\uparrow$ *ulazna*						

Sada da ovu inicijalnu tabelu primenjujemo simplex metod.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b	*bazične promenljive*
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0	$\frac{91}{10}$	x_1
0	1	0	0	1	0	0	10	$s_2 \leftarrow$ *izlazna*
0	$-\frac{7}{10}$	$\frac{23}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	1	0	$\frac{91}{10}$	s_3
0	$\frac{37}{10}$	$\frac{47}{20}$	$\frac{9}{20}$	0	0	1	$\frac{819}{10}$	s_4
0	-10,000	-3,000	5,000	0	0	0	910,000	
	$\uparrow$ *ulazna*							

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b	*bazične promenljive*
1	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$-\frac{3}{10}$	0	0	$\frac{61}{10}$	x_1
0	1	0	0	1	0	0	10	x_2
0	0	$\frac{23}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{7}{10}$	1	0	$\frac{161}{10}$	$s_3 \leftarrow$ *izlazna*
0	0	$\frac{47}{20}$	$\frac{9}{20}$	$-\frac{37}{10}$	0	1	$\frac{449}{10}$	s_4
0	0	-3,000	5,000	10,000	0	0	1,010,000	
		$\uparrow$ *ulazna*						

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b	*bazične promenljive*
1	0	0	$\frac{1}{23}$	$-\frac{9}{23}$	$-\frac{3}{23}$	0	4	x_1
0	1	0	0	1	0	0	10	x_2
0	0	1	$\frac{1}{23}$	$\frac{14}{23}$	$\frac{20}{23}$	0	14	x_3
0	0	0	$\frac{8}{23}$	$-\frac{118}{23}$	$-\frac{47}{23}$	1	12	s_4
0	0	0	$\frac{118{,}000}{23}$	$\frac{272{,}000}{23}$	$\frac{60{,}000}{23}$	0	1,052,000	

Iz ove tabele vidimo da je maksimalan nedeljni auditorijum za reklamni budžet od \$18,200 $z = 1,052,000$ i to kada je $x_1 = 4$, $x_2 = 10$ i $x_3 = 14$.

Mediji	*Broj reklama*	*Cena*	*Auditorijum*
Televizija	4	\$8,000	400,000
Novine	10	\$6,000	400,000
Radio	14	\$4,200	252,000
Ukupno	28	\$18,200	1,052,000

3 Minimalizacija

U prethodnom odeljku smo primenjivali simplex metodu samo na probleme linearnog programiranja u standardnom obliku gde je trebalo maksimizirati ciljnu funkciju. U ovom odeljku proširujemo ovaj postupak na linearne probleme programiranja u kojima ciljnu funkciju treba minimalizovati.

Problem minimalizacije u **standardnom obliku** treba da minimalizuje ciljnu funkciju $w = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ prema ograničenjima

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geqslant b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geqslant b_m \end{aligned}$$

gde $x_i \geqslant 0$ i $b_i \geqslant 0$. Osnovna procedura koja se koristi za rešavanje ovakvog problema je konverzija problema minimalizacije u *problem maksimizacijom* u standardnom obliku, a zatim primenjivanje simpleks metode kao što je opisano u prethodnom odeljku.

Primer 1 Naći minimalnu vrednost funkcije

$$w = 0.12x_1 + 0.15x_2$$

sa sledećim ograničenjima

$$\begin{aligned} 60x_1 + 60x_2 &\geqslant 300 \\ 12x_1 + 6x_2 &\geqslant 36 \\ 10x_1 + 30x_2 &\geqslant 90 \end{aligned}$$

gde $x_1 \geqslant 0$ i $x_2 \geqslant 0$. Prvi korak u pretvaranju ovog problema u problem maksimizacije je formiranje proširene matrice za ovaj sistem nejednakosti. Proširenoj matrici dodajemo poslednji red koji predstavlja koeficijente ciljne funkcije, kao u nastavku.

$$\begin{bmatrix} 60 & 60 & 300 \\ 12 & 6 & 36 \\ 10 & 30 & 90 \\ 0.12 & 0.15 & 0 \end{bmatrix}$$

Dalje zamenom mesta redovima i vrstama formiramo transponovanu matricu date matrice.

$$\begin{bmatrix} 60 & 12 & 10 & 0.12 \\ 60 & 6 & 30 & 0.15 \\ 300 & 36 & 90 & 0 \end{bmatrix}$$

Konačno, novu matricu tumačimo kao *maksimizacioni* problem na sledeći način. (Da bismo to učinili, uvodimo nove promenljive, y_1, y_2 i y_3.) Ovaj odgovarajući problem maksimizacije nazivamo **dual** originalnog problema minimalizacije.

Dualni maksimizacioni problem: Naći maksimalnu vrednost funkcije

$$z = 300y_1 + 36y_2 + 90y_3$$

sa ogranicenjima

$$60y_1 + 12y_2 + 10y_3 \leqslant 0.12$$
$$60y_1 + 6y_2 + 30y_3 \leqslant 0.15$$

gde $y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0$ i $y_3 \geqslant 0$.

Kako se ispostavilo, rešenje originalnog problema minimalizacije može se pronaći primenom simpleks metode na novi dualni problem, kao u nastavku.

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b	*bazične promenljive*
60	12	10	1	0	0.12	$s_1 \leftarrow$ *izlazna*
60	6	30	0	1	0.15	s_2
-300	-36	-90	0	0	0	
$\uparrow$ *ulazna*						

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b	*bazične promenljive*
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{60}$	0	$\frac{1}{500}$	y_1
0	-6	20	-1	1	$\frac{3}{100}$	$s_2 \leftarrow$ *izlazna*
0	24	-40	5	0	$\frac{3}{5}$	
		$\uparrow$ *ulazna*				

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b	*bazične promenljive*
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{120}$	$\frac{7}{4000}$	y_1
0	$-\frac{3}{10}$	1	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{2000}$	y_3
0	12	0	3	2	$\frac{33}{50}$	
			$\uparrow$ x_1	$\uparrow$ x_2		

Dakle, rešenje dualnog problema maksimizacije je $z = \frac{33}{50} = 0.66$. x-vrednosti koje odgovaraju ovom optimalnom rešenju nalaze se u preseku donje vrste i kolona koje odgovaraju veštačkim promenljivim. Drugim rečima, do optimalnog rešenja se dolazi za $x_1 = 3$ i $x_2 = 2$.

Činjenica da dualni problem maksimizacije ima isto rešenje kao i njegov izvorni problem minimalizacije formalno je navedena u teoremi koja se naziva Neumann-ov princip dualnosti, po američkom matematičaru John-u von Neumann-u (1903–1957).

Neumann-ov princip dualnosti Ciljna vrednost w problema minimalizacije u standardnom obliku ima minimalnu vrednost ako i samo ako ciljna vrednost z problema dualne maksimizacije ima maksimalnu vrednost. Štaviše, minimalna vrednost w jednaka je maksimalnoj vrednosti z.

3.1 Rešavanje problema minimalizacije

Dakle, da sumiramo.

Problem minimalizacije u **standardnom obliku** treba da minimalizuje ciljnu funkciju $w = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ prema ograničenjima

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\geqslant b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\geqslant b_m \end{aligned}$$

gde $x_i \geqslant 0$ i $b_i \geqslant 0$. Za rešavanje ovog problema pratiti sledeće korake:

1. Formirati **proširenu matricu** za dati sistem nejednačina i dodati donju vrstu koja se sastoji od koeficijenata ciljne funkcije.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 \end{bmatrix}$$

2. Formirati **transponovanu** matricu.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & c_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 \end{bmatrix}$$

3. Formirati **dualni problem maksimizacije** koji odgovara ovoj transponovanoj matrici. To jest, pronaći maksimum ciljne funkcije $z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_nm$ sa ograničenjima

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m &\leqslant c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m &\leqslant c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m &\leqslant c_m \end{aligned}$$

   gde gde $y_1 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$,...,$y_m \geqslant 0$.

4. Primeniti **simplex metodu** na dualni problem maksimizacije. Maksimalna vrednost z će biti minimalna vrednost w. Štaviše, vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ će se nalaziti u preseku donje vrste konačne simplex tablice i kolona koje odgovaraju veštačkim promenljivim.

3.2 Primer 3 - Primena simplex metode u biznisu

Mala naftna kompanija poseduje dve rafinerije. Da bi poslovala, rafinerija 1 košta 20,000 dolara dnevno, a može da proizvede 400 barela visokokvalitetne nafte, 300 barela nafte srednjeg kvaliteta i 200 barela nafte niskog kvaliteta svaki dan. Rafinerija 2 je novija i modernija. Košta 25,000 dolara dnevno, a može proizvesti 300 barela visokokvalitetne nafte, 400 barela nafte srednjeg kvaliteta i 500 barela nafte niskog kvaliteta svakog dana.

Kompanija ima ukupnu narudžbinu od 25,000 barela visokokvalitetne nafte, 27,000 barela nafte srednjeg kvaliteta i 30,000 barela nafte niskog kvaliteta. Koliko dana treba da radi svaka rafinerija da bi minimalizovala svoje troškove i još uvek rafinirala dovoljno nafte da pokrije svoje narudžbine? Neka x_1 i x_2 predstavljaju

broj dana koji rade 2 rafinerije. Ukupna cena je data ciljnom funkcijom

$$C = 20,000x_1 + 25,000x_2$$

a ograničenja sistemom nejednačina

$$400x_1 + 300x_2 \geqslant 25,000$$
$$300x_1 + 400x_2 \geqslant 27,000$$
$$200x_1 + 500x_2 \geqslant 30,000$$

gde $x_1 \geqslant 0$ i $x_2 \geqslant 0$. Proširena matrica koja odgovara ovom problemu je

$$\begin{bmatrix} 400 & 300 & 25,000 \\ 300 & 400 & 27,000 \\ 200 & 500 & 30,000 \\ 20,000 & 25,000 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica koja odgovara dualnom problemu maksimizacije je

$$\begin{bmatrix} 400 & 300 & 200 & 20,000 \\ 300 & 400 & 500 & 25,000 \\ 25,000 & 27,000 & 30,000 & 0 \end{bmatrix}.$$

U nastavku primenjujemo simplex metodu na dualni problem.

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b	*bazične promenljive*
400	300	200	1	0	12,000	s_1
300	400	500	0	1	25,000	$s_s \leftarrow$ *izlazna*
-25,000	-27,000	-30,000	0	0	0	
		$\uparrow$				
		ulazna				

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b	*bazične promenljive*
280	140	0	1	$-\frac{2}{5}$	10,000	$s_1 \leftarrow$ *izlazna*
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{1}{500}$	50	y_3
-7,000	-3,000	0	0	60	1,500,000	
$\uparrow$						
ulazna						

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	b	*bazične promenljive*
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{280}$	$-\frac{1}{700}$	$\frac{250}{7}$	y_1
0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{1400}$	$\frac{1}{350}$	$\frac{200}{7}$	y_3
0	500	0	25	50	1,750,000	
			$\uparrow$	$\uparrow$		
			x_1	x_2		

Iz treće simplex tablice vidimo da je rešenje originalnog problema minimalizacije

$$C = \$1,750,000$$

i to za $x_1 = 25$ i $x_2 = 50$. Prema tome, dve rafinerije treba da rade sledeći broj dana:

- Rafinerija 1: 25 dana
- Rafinerija 2: 50 dana

Primetiti da, ako dve rafinerije budu radile ovaj broj dana, kompanija će proizvesti sledeću količinu ulja:

- Visokokvalitetna nafta: $25(400) + 50(300) = 25{,}000$ barela
- Nafta srednjeg kvaliteta: $25(300) + 50(400) = 27{,}500$ barela
- Nafta niskog svaliteta: $25(200) + 50(500) = 30{,}000$ barela

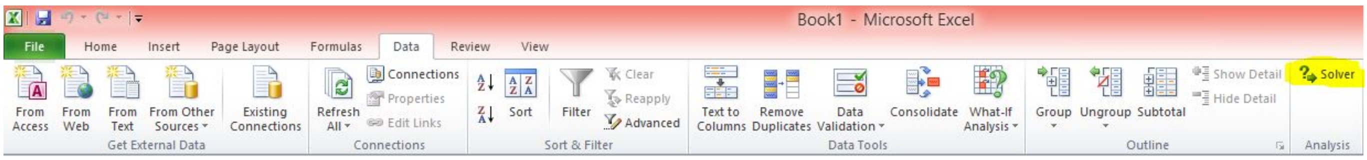
Ovako je postignut prvobitni nivo proizvodnje (sa viškom od 500 barela nafte srednje klase).

Digresija U prethodnim odeljcima bavili smo se problemima linearnog programiranja koji se pojavljuju u standardnom obliku. Sva ograničenja za probleme maksimizacije su uključivala $\leqslant$ znak nejednakosti, a ograničenja za probleme minimalizacije $\geqslant$ znak nejednakosti.

Postoje i problemi čija ograničenja uključuju oba tipa znakova nejednakosti. U tom slučaju, ukoliko funkciju cilja treba maksimizovati, problem se rešava isto kao standardni problem maksimizacije sa jednom malom razlikom. Naime, pri pretvaranju nejednačina u jednačine, kod nejednačina koje sadrže $\geqslant$, umesto sabiranja, treba oduzeti veštačku promenljivu.
U suprotnom, ukoliko se radi o problemu minimializacije, ceo sistem nejednačina treba pomnožiti sa -1 i problem dalje rešavati kao problem maksimizacije.

4 Simplex Solver u Microsoft Excel-u

Da bi se uopšte mogao koristiti Solver treba proveriti da li je obavljena instalacija istog u okviru Excel okruženja.Solver se nalazi u opciji **Data** kao na priloženoj slici ispod.



Slika 1: Izgled prozora pravilno dodatog Solvera

Ukoliko žuto markirana opcija ne postoji potrebno je dakle dodati je na sladeći način za Excel verzije 2010 ili mladje: **Files**>**Options**>**Excel Add-ins**>**Go**>**Solver**>**OK**.

Kada je **Solver** dodat potrebno je upoznati se sa odredjenom količinom pravila koja je potrebno ispratiti da bi se program pravilno izvršio.Za početak posmatramo primer:

Maksimizuj:

$$val = 3x_1 + x_2 + x_3$$

Pod uslovima:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

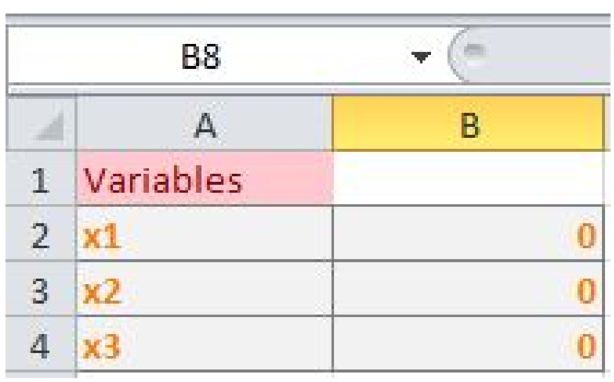
$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1)Fizički prebrojimo promenljive i zaključimo da ih ima tri x_1, x_2, x_3, zatim obratimo pažnju na to da ciljnu funkciju treba maksimizovati i da postoji **!!!ŠEST!!!** dodatnih uslova.

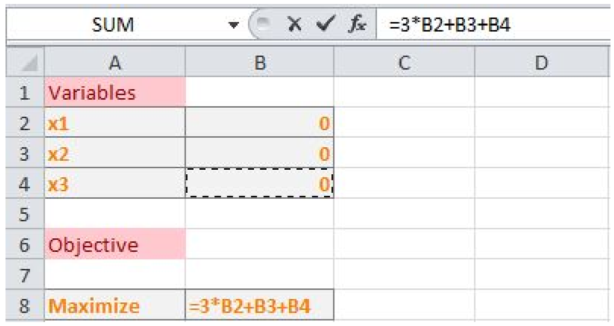
2)Sada ja u Excel-u potrebno napraviti polja za promenljive,ciljnu funkciju,i nejednakosti.



Slika 2: Izgled polja za nebazične promenljive

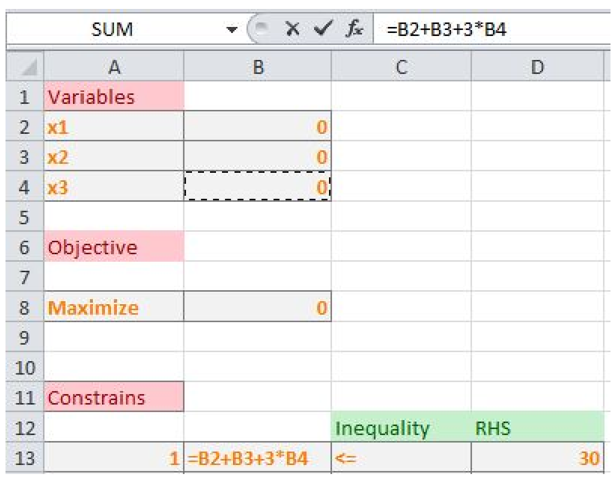
Dakle neko polje se nazove Variables ili kako god je korisniku zgodnije da upamti da se tu radi o nebazičnim vrednostima, a u ćeliju pored je potrebno uneti vrednost nula.

Sada je potrebno napraviti funkciju u Excel-u koja ce zapravi biti naša ciljna funkcija.Polje u kome želimo da definišemo funkciju mora da poćne sa znakom jednakosti, a nakon njega se piše formula, stim da ako u formuli ućestvuje neko od definisanih polja ne pišemo njegovo ime već je dovoljno kliknuti na onu ćeliju u sa vrednošću nula pored odgovarajućeg imena promenljive.Naznaka da je polje dodatno je pokretna traka crtica oko kliknutog polja.



Slika 3: Izgled ćelije ciljne funkcije

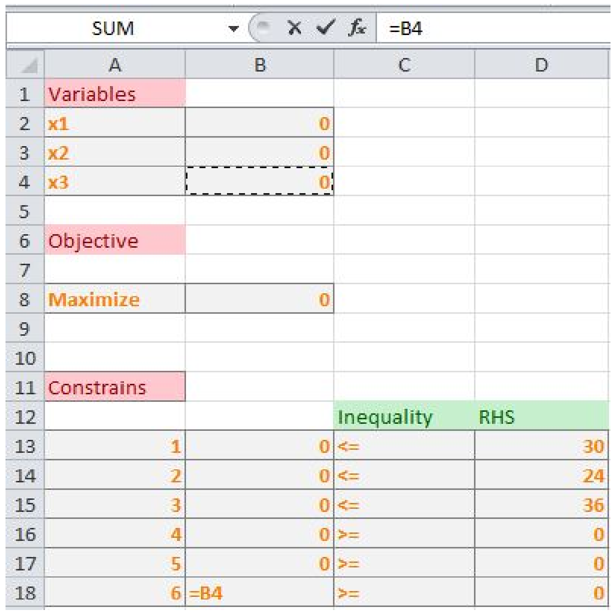
Stvaranja polja za nejednakosti tj. uslove linearnog programa je manje više sličan. Potrebna su polja Inequality,RHS(Rigt-Hand-Side) tj. desna strana nejedakosti. Igleda tog dela može izgledati kao na slici ispod.



Slika 4: Izgled ćelije nejednakosti

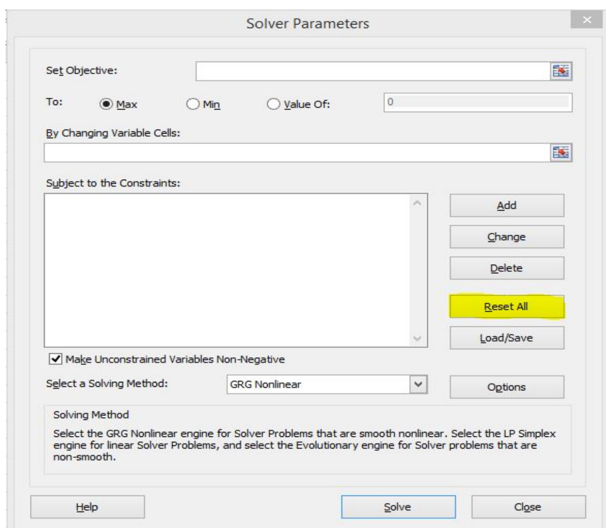
Dakle ispod polja Constrains mogu se staviti radi estetike redni brojevi uslova, a da se pored njega doda funkicja tog uslova(konstruisanje izraza funkcije je već objašnjeno), ispod polja Inequality se upise znak $\leq$ ili $\geq$ naravno zavisno od zadatog izraza. I da bi izraz bio potpun potrebno je još dodati i RHS opet zavisno od izraza.

Naš pretočeni problem u računarsku formu izgleda kao na slici ispod.



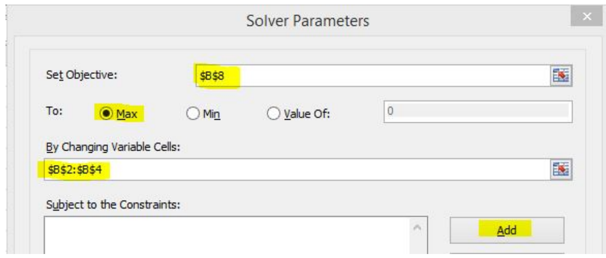
Slika 5: Izgled spremnog programa

3)Kada aktiviramo opciju **Solver** iz **Data** menija otvara nam se prozor u kome je odmah potrebno čekirati opciju **Reset All**. Nakon toga se moze krenuti u dalje podesavanje ostalih polja u suprotnom se ne garantuje tačnost izračunavanja.



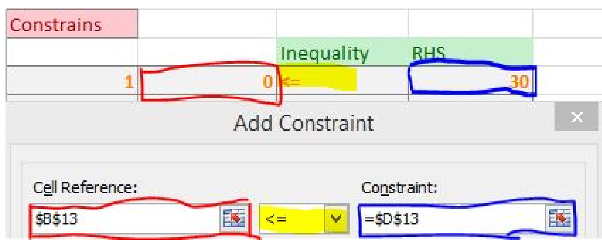
Slika 6: Izgled Solver-a

U ovom prozoru je potrebno podestii polja **Set Objective** klikom na onu ćeliju gde je kreirana fukncija ciljne funkcije. Polje **To** je potrebno postaviti na **Max**, a polje **By Changing Varilables Cells** je potrebno inicijalizovati tako što se kursorom prevuče preko vrednosti nula nebazičnih promenljivih. Nakon toga se klikne opcija **Add**.Pravilna inicijalizacija je prikazana na slici ispod.

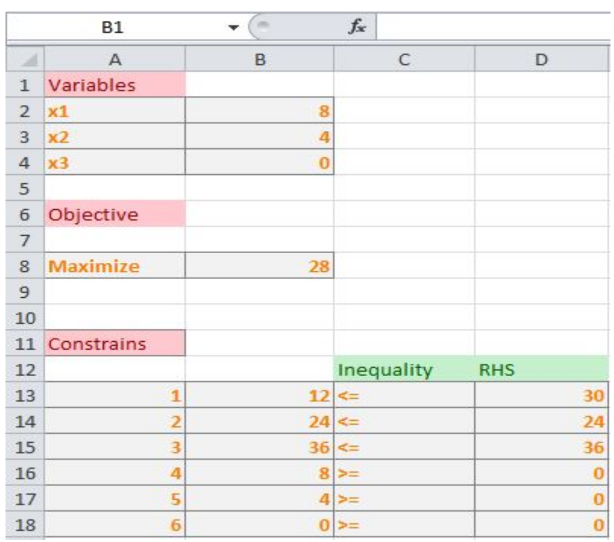


Slika 7: Solver prozor prvi deo

Sada je još potrebno još dodati uslove, a što se vrši pomoću prozora **Add Constraints** koji se otvara nakon klika na **Add**.U ćeliju **Cell Reference** je potrebno dodati vrednost nejednakosti klikom na ćeliju iz odgovarajućeg reda sa vrednošću nula, zatim iz padajućeg menija izabrati odgovarajući znak i na kraju za polje **Constraints** dovoljno je kliknuti na ćeliju ispod RHS iz odgovarajućeg reda. To je naravno potrebno ponoviti za svaki od uslova.



Slika 8: Prozor za dodavanje uslova



	A	B	C	D
1	Variables			
2	x1	8		
3	x2	4		
4	x3	0		
5				
6	Objective			
7				
8	Maximize	28		
9				
10				
11	Constrains			
12			Inequality	RHS
13	1	12	<=	30
14	2	24	<=	24
15	3	36	<=	36
16	4	8	>=	0
17	5	4	>=	0
18	6	0	>=	0

Slika 9: Izgleda programa nakon izračunavanja

Da bi se dobio ovaj prozor potrebno je kliknuti **Solve**.U ćeliji **Maximize** se dobija vrednost programa.

5 Implementacija Simplex metode u software-u

Iako recept pomoću kog se izvršava Simplex algoritam nakon par primera postaje intuitivan i usadi se u mišićnu memoriju, to ne daje za pravo da se poveruje da ce se tako lako implementirati u bilo kom programskom okruženju. Način implementacije biće paralelno ispraćen sa primerom da bi razmisljanje direktno bilo primenjeno. U tekstu koji sledi biće prezentovani jedan opšti način da se ovaj program iskodira.

Problem je sledeći:

Maksimizuj:

$$val = 3x_1 + x_2 + x_3$$

Pod uslovima:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 36$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Linearni program je sada u standardnoj formi. Kao što znamo za *Simpleks* metodu je pogodnija forma izraza koja se zove *Slack* forma. Zapazimo sledeće

$$x_1, x_2, x_3$$

je ono što zovemo nebazične promenljive. Sada ćemo uvesti bazične promenljive tako sto prebrojimo broj uslova sem poslednjeg. Dakle ima ih tri, znaci uvodimo tri bazične promenljive

$$x_4, x_5, x_6.$$

Sada uslove prevodimo u *Slack* formu tako sta nam sve bazične promenljive budu sa jedne, recimo leve strane, a sve nebazične i brojevi sa leve strane nejednakosti na drugoj strani dok je izmedju leve i desne strane znak jednakosti.

Što bi trebalo da izgleda ovako:

$$x_4 = 30 - x_1 - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2x_1 - 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 36 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

Sada malo uopštavanja, jer mora se priznati da su svi ovi medjukoraci iz *Standardne* u *Slack* formu zapravo nepotrebni za računar. Naime ako mi sada zapišemo problem na sledći način.

Maksimizirati:

$$val = \vec{c} * \vec{x}$$

Pod uslovima:

$$\mathbf{A} * \vec{x} + \vec{b} = \vec{x_s}$$

Dakle **A** je matrica koja u sebi sadrži koeficijente iz uslova nejednakosti ali sa promenjenim predznakom, $\vec{b}$ bi sadržao nebazične pomenljive, $\vec{c}$ koeficijente ciljne funkcije val koju treba maksimizovati.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \\ -4 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Do ovog momenta kada imamo ovako sredjene matrice može se postići na vise načina. Ili čemo parsirati cljnu funkciju i uslove pa onda dinamičkom alokacijmo popuniti matricu ili iskodirati neki linijski program gde bi bez parsiranja stringa korisnik odmah unosio vrednosti u matricu. To je već stvar ukusa, ali ono što je bitno je da dalje nastavljamo izvršavanje *Simplex* algoritma sa $\mathbf{A}, \vec{b}, \vec{c}$.

Neke osnovne ideje koje ćemo nadalje koristiti jesu:

- Postavitit vrednosti svih nebazičnih promenljivih na nulu i izračunati vrednost cljne funkcije val.

  Dakle kroz svaku iteraciju ćemo pre pivotiranja postavaljti nebazične vrednosti na nulu što če nam dati trenutni rešenje u obliku

  $$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 0, 30, 24, 36)$$
  $$val = 0$$

- Prosledjivanje parametara $\mathbf{A}$,$\vec{x}$,$\vec{c}$ u metodu koja obavlja zamenu bazičnih i nebazičnih promenljivih i proracunava koeficijente ciljne funkcije u bazičnih promenljivih nastalih ovom zamenom. Znaci mi sada imamo trenutno rešenje $(0, 0, 0, 30, 24, 36)$ i treba da izaberemo nebazičnu promenljivu koju menjamo sa bazičnom. Treba mi ona čiji su koeficijenti u ciljnoj funkciji pozitivni. Recimo da izaberemo x_1. Sada se pitamo koliko najvise možemo da povećamo izabranu promenljivu tako da se ne prekorači uslov $x_4, x_5, x_6 \geq 0$. Znači ostale nebazične promenljive su i dalje na nuli.Jenostavno se vidi da najveće pojačanje daje $4x_1$, kako se taj član nalazi u bazičnoj promenljivoj x_6. Daljom jednostavnom aritmetikomi zamenom se dobija:

$$x_1 = 9 - \frac{x_6}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2}$$
$$x_4 = 21 + \frac{x_6}{4} - \frac{3x_2}{4} - \frac{5x_3}{2}$$
$$x_5 = 6 + \frac{x_6}{2} - \frac{3x_2}{2} - 4x_3$$
$$val = 27 - \frac{3x_6}{4} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2}$$

Sada bi se ponovo sva nebazična rešenja postavila na nulu i izračunala vrednost ciljne funkcije.

$$(9, 0, 0, 21, 6, 0)$$
$$val = 27$$

Kako i dalje u ciljnoj funkciji imamo nebazične promenljive čiji koeficijenti pozitivni možemo da vršimo ponovo iteraciju tj. pivotiranje. U situaciji kada imamo više nebazičnih promenljivih promenljivih vršimo odabiranje ili

Blandovim pravilom:Izaberi promenljivu sa najmanjim indeksom..

Ili možemo primeniti

Nasumično pravilo: Izabrati neku promenljivu slučajno(sa uniformnom verovatnoćom)

Kreiramo metodu Pivot($\mathbf{A}, \vec{c}, \vec{b}, C, B, l, e.$) Za $\mathbf{A}, \vec{b}, \vec{c}$ sam već rekao šta su, C je dužina vektora $\vec{c}$,B je dužina vektora $\vec{b}$,l je indeks bazične promenljive ,e je indeks nebazične promenljive.

Pre svega treba kreirati nove pomoćne parametre koje ću označiti indeksom pom.

$$\mathbf{A}_{pom} \leftarrow \overrightarrow{0_{|B|x|C|}}$$

$$\overrightarrow{b_{pom}} \leftarrow \overrightarrow{0_{|B|}}$$

$$\overrightarrow{c_{pom}} \leftarrow \overrightarrow{0_{|C|}}$$

Znači odgovarajuće matrice popunjavam sa nulama, naravno to se sve lako zavrsi sa nekom pod metodom kojoj saljem dimenzije i element koji zelim da unese, dve *for* petlje završavaju taj deo posla.

$$\overrightarrow{b_{pom}[l]} \leftarrow \overrightarrow{0_{|B|}}$$

Ovo se radi iz razloga samo da memorija koja je alocirana ostala nepopunjena.

Hajde da vidimo šta se desilo pri zameni promenljive x_1 i x_6. Medjukoraci su izgledali ovako.

$$4x_1 = 36 - x_6 - x_2 - 2x_3$$

$$x_1 = \frac{36}{4} - \frac{x_6}{4} - \frac{x_2}{4} - \frac{2x_3}{4}$$

Da vidimo šta je ovde neka krupna priča sada. Kako nam se član iz ulsova 36 nalazi u vektrou $\vec{b}$ to nam neće biti problem da podelimo element na poziciji $b[l]$ sa elementom na $\mathbf{A}[e][l]$ i da ga upišemo u $b_{pom}[l]$.

$$b_{pom}[e] = \frac{b[l]}{\mathbf{A}[l][e]}$$

Kada smo ovo sredili potrebno je sada u vrsti l originalne matrice preračunati koeficijente i upisati ih u pomoćnu matricu $\mathbf{A}$.

$$\textbf{for all}(i \in C) \wedge (i! = l)$$
$$\mathbf{A}_{pom}[e][i] = \mathbf{A}[l][i]/\mathbf{A}[l][e]$$

A na kraju pri izlazsku iz ove petlje je potrebno da se kako bazične promenljive imaju koeficijenata jedan na mesto gde je bila nebazična promenljiva komandom

$$\mathbf{A}_{pom}[e][l] = \frac{1}{\mathbf{A}[l][e]}$$

Kao ispomoć praćenju prilažem i sadržaj vektora $\vec{b}$ i matrice A_{pom}.

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_{pom} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sada kada smo zamenili baziĉnu x_6 i nebaziĉnu x_1 potrebno je u ostalih $C-1$ vrsta tj. u svim ostalim izrazima gde figuriše x_1 ubacimo nove vrednosti i da izrazimo ostale baziĉne promenljive preko x_6.

Medjurezultati izgledaju:

$$x_4 = 30 - 1(9 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3) - x_2 - 3x_3$$

$$x_5 = 24 - 2(9 - \frac{1}{4}x_6 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3) - 2x_2 - 5x_3$$

Potrebno je proći kroz sve vrste matrice **A** sem one u kojoj se vrši zamena promenljivih konkretno ona sa indeksom e jer smo to vec uradili. Dalje je potrebno da se svaki ĉlan e -te vrste matrice Apom izmnoži sa odgovarajućim koeficijentom koji stoji uz indeks nebaziĉne promenljive koja je pivotirana.Prema našim oznakama to će u svakoj vrsti biti onaj element sa indeksom **A**[i][e], za zadatu i-tu vrstu. I na kraju je potrebno sabrati iste promenljive i srediti konaĉan koeficijent ispred nje. Naravno kako je u našem sluĉaju x_1 zamenilo ulogu sa x_6 onda ce koeficijent ispred x_6 biti upisan na mesto gde je stajao koeficijent od x_1 .

Algorithm 1 Odredjivanje koeficijenata za ostale uslove

```
for (all i ∈ B) ∧ (i ≠ l)
    b_pom[i] = b[i] − b_pom[b] ∗ A[i][e]
    for (all j ∈ C) ∧ (j ≠ e)
        A_pom[i][j] = A[i][j] − A_pom[e][j] ∗ A[i][e]
    A_pom[i][l] = −A_pom[e][l] ∗ A[i][e]
for (all i ∈ N) ∧ (i ≠ e)
    c_pom[i] = c[i] − c[e] ∗ A[e][i]
c_pom[l] = −c[e] ∗ A_pom[e][l]
return(A_pom, b⃗_pom, c⃗_pom)
```

Dakle nakon samo jednog prolaska kroz metodu **PIVOT** matrice za ovaj primer će izlgedati kao u prilogu dole.

$$x_1 = 9 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{4}x_6$$

$$x_4 = 21 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_6$$

$$x_5 = 6 - \frac{3}{2}x_2 - 4x_3 + \frac{1}{2}x_6$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 21 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dalje se moze napraviti jos jedna petlja koja bi u ciljnoj funkciji izracunala koeficijente, cilje funkcija bi onda bila:

$$val = 27 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_6.$$

Medjutim ako se sada i bazicne i nebazicne promenljice postave na nulu u originalnom obliku ciljne funkcije dobija se resenje u obliku:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (9, 0, 0, 21, 6, 0)$$

Sada odavde u originalnu ciljnu funkciju zamenimo resenja za x_1, x_2x_3,.Dakle u

$$val = 3x_1 + x_2 + x_3,$$

i dobijamo resenje.

$$val = 27.$$

Oblik druge iteracije našeg primera ,gde pivotiramo x_2 oko x_5 bi izgleda:

$$x_1 = 8 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_5 - \frac{1}{3}x_6$$

$$x_2 = 4 - \frac{8}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6$$

$$x_4 = 18 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_3$$

Manje preporucenom metodom ciljna funkcija bi izgledala:

$$val = 28 - \frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_5 - \frac{2}{3}x_6$$

Ali ono kao što je rečeno ne mora da se trazi već se samo u bazično rešenje zaneme one nebazične iz originalnog rešenja.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (8, 4, 0, 18, 0, 0)$$

$$val = 28.$$

Krajnja enkapsulacija algoritma bi bila:

Algorithm 2 Simplex-Loop(val,$\mathbf{A}$,$\vec{b}, \vec{c}, C, B$)

```
for i<B
    k[i]=i++                    ▷ Da bi se uporedili koef. sa originalom
k1⃗ ← k⃗
while e<=C
    max=A[i][e]
    for i+1<=B  ▷ Petlja koja trazi ona clan cije pojacanje najvise utice na bazicnu promenljivu
        if(A[i][e]>max)
            max=A[i][e]
            l=i
            k1[i]=l
    ++e
Pivot(A,c⃗,b⃗,C,B,l,e)
for(i<C)
    if(k1[i]==k[i])
        val+=0
    else
        val+=c[i]
return val
```

Algorithm 3 Simplex($\mathbf{A}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$,val=0)

(C,B,$\mathbf{A}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$) $\leftarrow$Initialize-Simplex($\mathbf{A}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$)
val $\leftarrow$Simplex-Loop(val,$\mathbf{A}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$,C,B)
return val

Metoda Simplex ima argument koji ima podrazumevanu vrednost val=0, a koji služi da vrati optimalnu vrednost. Metoda Initialize-Simplex služi za parsiranje ulaznog tekstualnog fajla i povratna vrednost joj je vektro koji sadrži dužine vektora $\vec{b}, \vec{c}$,C i B, i matricu **A**. Metoda Simplex-Loop se vrti dokle god postoji nebazična promenljiva koju je moguce pivotirati, poziva metodu Pivot i računa vrednost cljne funkcije.

6 Zaključak

Simpleks metoda je praktičan način za rešavanje složenih problema linearnog programiranja koji ima široku primenu u programiranju.

Literatura

- https://prekucavanje.files.wordpress.com/2012/10/simpleks1.pdf
- https://college.cengage.com/mathematics/larson/elementary_linear/4e/shared/downloads/c09s3.pdf
- https://college.cengage.com/mathematics/larson/elementary_linear/4e/shared/downloads/c09s4.pdf
- http://www.efzg.unizg.hr/UserDocsImages/MAT/tperic/3-4_OI_2017.pdf
- https://college.cengage.com/mathematics/larson/elementary_linear/4e/shared/downloads/c09s5.pdf
- http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/1351789264-16-Matematicko_programiranje_i_optimizacija_-_vezbe.pdf
- https://github.com/PetarV-/Algorithms/blob/master/Mathematical%20Algorithms/Simplex%20Algorithm.cpp?fbclid=IwAR2OyWtZ_7a1QuOOMtEE6bNNnjQTmWEOpALJi7WZJtSPluquPzYkt
- https://ocw.mit.edu/search/ocwsearch.htm?q=simplex&fbclid=IwAR0U8nEVrCuXiL6U2Mhii6CeQg