Branko J. Malešević
ETF Beograd, 2020.

UOPŠTENI INVERZI MATRICA I METODA NAJMANJIH KVADRATA

1 Inverzna matrica

Podsećamo se nekih pojmova Linearne algebre. Neka je dato polje $\mathbb{F}$. Podsetićemo se nekih oznaka

$\mathbb{F}^{m\times n}$ skup svih matrica formata $m\times n$ nad poljem $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F}_r^{m\times n}$ skup svih matrica formata $m\times n$ nad poljem $\mathbb{F}$ ranga r.

Kvadratna matrica $A\in\mathbb{F}^{k\times k}$ jeste *regularna matrica* ukoliko za jediničnu matricu $\mathrm{I}\in\mathbb{F}^{k\times k}$ postoji kvadratna matrica $X\in\mathbb{F}^{k\times k}$ takva da

$$AX = XA = \mathrm{I},$$

za neki prirodan broj k. U tom slučaju matricu X nazivamo *inverzna matrica* i pišemo

$$X = A^{-1}.$$

Kvadratna matrica A koja nije regularna naziva se *singularna matrica*.

U daljem razmatranju smatramo da je $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ili $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

Navodimo neke osnovne osobine regularnih matrica

1º. $|A|\neq 0 \implies A^{-1}=\dfrac{\mathrm{Adj}(A)}{|A|}$.

2º. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3º. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

4º. $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$,

5º. $(A^*)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$, gde je $*$ oznaka konjugovanog transponovanja, ukoliko je A kvadratna matrica nad poljem kompleksnih brojeva.

2 Sistem Penrouzovih jednačina

Ako je $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ regularna matrica, tada inverzna matrica $X=A^{-1}$ ispunjava *sistem Penrouzovih jednačina*

$$\begin{array}{lll}
(i) & AXA=A & (\Leftrightarrow AA^{-1}A=A),\\
(ii) & XAX=X & (\Leftrightarrow A^{-1}AA^{-1}=A^{-1}),\\
(iii) & (AX)^*=AX & (\Leftrightarrow (AA^{-1})^*=AA^{-1}),\\
(iv) & (XA)^*=XA & (\Leftrightarrow (A^{-1}A)^*=A^{-1}A).
\end{array}$$

3 Postupci invertovanja regularne matrice

3.1 Invertovanje po vrstama

Neka su $L_1, ..., L_p$ matrice elementarnih transformacija na vrstama regularne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da za proizvod

$$Q = L_p L_{p-1} ... L_1$$

važi

$$Q\,A = I.$$

Prethodna jednakost je dovoljna da zaključimo

$$Q = A^{-1}.$$

Opisaćemo postupak invertovanja po vrstama. Naime, neka primenom elementarnh transformacija na vrstama matrice A dobijamo jediničnu matricu:

$$Q\,A = L_p L_{p-1} ... L_1\, A = I.$$

Može se pokazati da primenom tih istih elementarnih transformacija na vrstama jedinične matrice I dobijamo upravo inverznu matricu:

$$L_p L_{p-1} ... L_1 I = QI = Q = A^{-1}.$$

Odatle sledi postupak invertovanja regularnih matrica po vrstama:

$$[\, A \mid I \,] \cong \ldots \cong [\, I \mid A^{-1} \,].$$

Primer 3.1. *Invertovati po vrstama realnu matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Važi $|A| = 1 \neq 0$, tj. matrica A je regularna pa se može primeniti postupak invertovanja po vrstama:

$$\begin{aligned}
[\, A \mid I_3 \,] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (I_2 := (-1)\cdot I_1 + I_2) \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (I_3 := (-1)\cdot I_1 + I_3) \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (I_3 := 0\cdot I_2 + I_3) \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (I_2 := 0\cdot I_3 + I_2) \\
&\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (I_1 := (-2)\cdot I_3 + I_1)
\end{aligned}$$

$$\cong \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (I_1 := (1)\cdot I_2 + I_1)$$

$$\cong \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Samim tim:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

3.2 Invertovanje po kolonama

Neka su $R_1, ..., R_s$ matrice elementarnih transformacija na kolonama regularne matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da za proizvod

$$P = L_1 L_2 ... L_s$$

važi

$$A\,P = I.$$

Prethodna jednakost je dovoljna da zaključimo

$$P = A^{-1}.$$

Opisaćemo postupak invertovanja po kolonama. Naime, neka primenom elementarnih transformacija po kolonama matrice A dobijamo jediničnu matricu:

$$A\,P = A\,R_1 R_2 ... R_s = I.$$

Može se pokazati da primenom tih istih elementarnih transformacija po kolonama jedinične matrice I dobijamo upravo inverznu matricu:

$$R_1 R_2 ... R_s I = IQ = Q = A^{-1}.$$

Odatle sledi postupak invertovanja regularnih matrica po kolonama:

$$\left[\frac{A}{I}\right] \cong \ldots \cong \left[\frac{I}{A^{-1}}\right].$$

Primer 3.2. *Invertovati po kolonama realnu matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Važi $|A| = 1 \neq 0$, tj. matrica A je regularna pa se može primeniti postupak invertovanja po kolonama:

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \hline I_3 \end{array}\right] = \underset{(J_2 := J_1 + J_2)}{\left[\begin{array}{rrr} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \cong \underset{(J_3 := (-2)\cdot J_1 + J_3)}{\left[\begin{array}{rrr} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

$$\cong \underset{(J_3 := 0\cdot J_2 + J_3)}{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \cong \underset{(J_3 := 0\cdot J_2 + J_3)}{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

$$\cong \underset{(J_1 := (-1)\cdot J_3 + J_1)}{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]} \cong \underset{(J_1 := (-1)\cdot J_2 + J_1)}{\left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

$$\cong \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Samim tim:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

3.3 Invertovanje po vrstma i kolonama

Pokazaćemo kako je moguće odrediti inverznu matricu elementarnim transformacijama i na vrstama i na kolonama. Neka su za regularnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ odredjene:

$$L_1, \ldots, L_k \text{ matrice elementarnih transformacija na vrstama}$$

$$R_1, \ldots, R_s \text{ matrice elementarnih transformacija na kolonama}$$

takve da za matrice

$$Q = L_k L_{k-1} \ldots L_1 \quad \text{i} \quad P = R_1 R_2 \ldots R_s$$

važi

$$QAP = I.$$

Može se pokazati da primenom tih istih elementarnih transformacija po kolonama/vrstama jedinične matrice I dobijamo dve matrice P/Q respektivno, čiji proizvod određuje upravo inverznu matricu

$$(\mathrm{I}\mathsf{R}_1 \dots \mathsf{R}_s)(\mathsf{L}_p \dots \mathsf{L}_1 \mathrm{I}) = (\mathrm{I}\mathsf{P})(\mathsf{Q}\mathrm{I}) = \mathsf{P}\mathsf{Q} = \mathsf{A}^{-1},$$

jer

$$\mathsf{Q}\mathsf{A}\mathsf{P} = \mathrm{I} \implies \mathsf{A} = \mathsf{Q}^{-1}\mathsf{P}^{-1} = (\mathsf{P}\mathsf{Q})^{-1} \implies \mathsf{P}\mathsf{Q} = \mathsf{A}^{-1}.$$

Samim tim, postupak invertovanja regularne matrice primenom elementarnih transformacija po vrstama i kolonama nad proširenom matricom (sa dve jedinične matrice kao što se navodi) je dat sa:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathrm{I} \\ \hline \mathrm{I} & \end{array}\right] \cong \dots \cong \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & \mathsf{Q} \\ \hline \mathsf{P} & \end{array}\right] \implies \mathsf{A}^{-1} = \mathsf{P} \cdot \mathsf{Q}.$$

Primer 3.3. *Invertovati sledeću realnu matricu po vrstama i kolonama*:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešenje. Matrica A je regularna, jer prema postupku koji navodimo važi $\mathsf{A} \cong \dots \cong \mathrm{I}$. Prvo primenjujemo elementarne transformacije po vrstama

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathrm{I} \\ \hline \mathrm{I} & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \quad (I_2 := (-1)\cdot I_1 + I_2)$$

$$\cong \left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \quad (I_3 := (-1)\cdot I_1 + I_3)$$

$$\cong \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \quad (I_3 := 0\cdot I_2 + I_3)$$

i potom primenjujemo elementarne transformacije po kolonama

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathrm{I} \\ \hline \mathrm{I} & \end{array}\right] \cong \underset{(J_2 := J_1 + J_2)}{\left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]} \cong \underset{(J_3 := (-2)\cdot J_1 + J_3)}{\left[\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]} \cong \underset{(J_3 := 0\cdot J_2 + J_3)}{\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]}.$$

Konačno

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \\ \hline I & \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right],$$

i odatle zaključujemo $A \cong \cdots \cong I$, jer je $Q \cdot A \cdot P = I$. Inverzna matrica je data u obliku proizvoda:

$$A^{-1} = P \cdot Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

4 Uopšteni inverzi matrica

Neka je data matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, formata $m \times n$, tada matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$, formata $n \times m$, jeste $\{i\}$*−inverz* ukoliko ispunjava $\{i\}$−tu jednačinu

(1) $$AXA = A,$$

(2) $$XAX = X,$$

(3) $$(AX)^* = AX,$$

(4) $$(XA)^* = XA;$$

za neko $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ i tada pišemo

$$X = A^{(i)}.$$

Skup rešenja jednačne (i) uvodimo sa

$$A\{i\} = \left\{ X \in \mathbb{C}^{n\times m} \mid (i) \right\},$$

za neko $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dalje uvodimo

$$A\{i_1, i_2\} = A\{i_1\} \cap A\{i_2\},$$
$$A\{i_1, i_2, i_3\} = A\{i_1\} \cap A\{i_2\} \cap A\{i_3\},$$
$$A\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = A\{i_1\} \cap A\{i_2\} \cap A\{i_3\} \cap A\{i_4\};$$

za neki podskup $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Samim tim, saglasno prethodnom, važi

ako $X \in A\{i_1\}$ tada zapisujemo $X = A^{(i_1)}$ i matrica X je jedan $\{i_1\}$-inverz
ako $X \in A\{i_1, i_2\}$ tada zapisujemo $X = A^{(i_1,i_2)}$ i matrica X je jedan $\{i_1, i_2\}$-inverz
ako $X \in A\{i_1, i_2, i_3\}$ tada zapisujemo $X = A^{(i_1,i_2,i_3)}$ i matrica X je jedan $\{i_1, i_2, i_3\}$-inverz
ako $X \in A\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ tada zapisujemo $X = A^{(i_1,i_2,i_3,i_4)}$ i matrica X je jedan $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$-inverz

za neki podskup $\{i_1, i_2, i_3, i_4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$. Uobičajeno je da indekse navodimo u neopadujućem redosledu $i_1 \le i_2 \le i_3 \le i_4$. Napomenimo da koristimo oznaku

$$A^\dagger = A^{(1,2,3,4)},$$

ukoliko je $A^\dagger$ rešenje sve četiri Penrouzove jednačine $(1)-(4)$ i takvo rešenje se naziva *Mur-Penrouzov inverz*.

Ako je A regularna matrica tada $\mathsf{A}^\dagger = \mathsf{A}^{-1}$. Pokazaćemo da za svaku matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ postoji jedinstveno određen Mur-Penrouzov inverz. Posebno napomenimo ako je $\mathsf{A} = \mathsf{0}$ tada $\mathsf{A}^\dagger = \mathsf{0}$.

Primer 4.1. *Neka je data matrica*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za matricu

$$\mathsf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

odrediti koje od Penrouzovih jednačina ispunjava (u odnosu na matricu A*)?*

Rešenje. Matrica B je jedan $\{1\}-$inverz jer je

$$\begin{aligned} \mathsf{ABA} = \mathsf{A} &\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrica B je takođe i jedan $\{2\}-$inverz jer važi

$$\begin{aligned} \mathsf{BAB} = \mathsf{B} &\iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrica B nije $\{3\}-$inverz jer

$$\begin{aligned} (\mathsf{AB})^* \neq \mathsf{AB} &\iff \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right)^* \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrica B nije $\{4\}-$inverz jer

$$\begin{aligned} (\mathsf{BA})^* \neq \mathsf{BA} &\iff \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^* \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Konačan zaključak:

$$\mathsf{B} = \mathsf{A}^{(1,2)}.$$

Dakle, matrica B ispunjava jedino Penrouzove jednačine (1) i (2). □

Teorema 4.2. *Ako sistem Penrouzovih jednačina* (1) − (4) *ima rešenje ono je jedinstveno.*

Dokaz. Neka su X i Y dva rešenja sistema Penrouzovih jednačina, tada važi:

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{X}(\mathsf{AX}) && (2) \\ &= \mathsf{X}(\mathsf{AX})^* && (3) \\ &= \mathsf{XX}^*\mathsf{A}^* && (*) \\ &= \mathsf{XX}^*(\mathsf{AYA})^* && (1) \\ &= \mathsf{XX}^*\mathsf{A}^*\mathsf{Y}^*\mathsf{A}^* && (*) \\ &= \mathsf{X}(\mathsf{AX})^*(\mathsf{AY})^* && (*) \\ &= \mathsf{X}(\mathsf{AX})(\mathsf{AY}) && (3) \\ &= \mathsf{XAY} && (1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathsf{Y} &= (\mathsf{YA})\mathsf{Y} && (2) \\ &= (\mathsf{YA})^*\mathsf{Y} && (4) \\ &= \mathsf{A}^*\mathsf{Y}^*\mathsf{Y} && (*) \\ &= (\mathsf{AXA})^*\mathsf{Y}^*\mathsf{Y} && (1) \\ &= \mathsf{A}^*\mathsf{X}^*\mathsf{A}^*\mathsf{Y}^*\mathsf{Y} && (*) \\ &= (\mathsf{XA})^*(\mathsf{YA})^*\mathsf{Y} && (*) \\ &= (\mathsf{XA})(\mathsf{YA})\mathsf{Y} && (4) \\ &= \mathsf{XAY} && (1) \end{aligned}$$

Odatle $\mathsf{X}=\mathsf{Y}$, tj. rešenje Penrouzovog sistema (1) − (4) jeste jedinstveno. ■

Teorema 4.3. *Neka je data ne-nula matrica* $\mathsf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. *Tada postoje matrice* $\mathsf{C} \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ *i* $\mathsf{D} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$, *takve da važi faktorizacija punog ranga*:

$$\mathsf{A} = \mathsf{C} \cdot \mathsf{D}. \tag{5}$$

Dokaz. Posmatrajmo matricu A zapisanu po kolonama $\mathsf{A} = \left[\vec{\mathsf{A}}^{[1]} \dots \vec{\mathsf{A}}^{[n]}\right] \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$. Iz matrice A formirajmo podmatricu linearno nezavisnih kolona

$$\mathsf{C} = \left[\,\vec{\mathsf{c}}_1 \dots \vec{\mathsf{c}}_r\,\right] = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \dots & c_{rm} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_r^{m\times r}.$$

Svaku kolonu $\vec{\mathsf{A}}^{[j]}$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju linearno nezavisnih kolona

$$\begin{aligned} \vec{\mathsf{A}}^{[j]} &= d_{j1} \cdot \vec{\mathsf{c}}_1 + \dots + d_{jr} \cdot \vec{\mathsf{c}}_r \\ &= d_{j1} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1m} \end{bmatrix} + \dots + d_{jr} \cdot \begin{bmatrix} c_{r1} \\ \vdots \\ c_{rm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1m} \end{bmatrix} \cdot d_{j1} + \dots + \begin{bmatrix} c_{r1} \\ \vdots \\ c_{rm} \end{bmatrix} \cdot d_{jr} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \dots & c_{rm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{j1} \\ \vdots \\ d_{jr} \end{bmatrix} \\ &= \mathsf{C} \cdot \vec{\mathsf{d}}_j, \end{aligned}$$

za neku vektor kolonu

$$\vec{\mathsf{d}}_j = \begin{bmatrix} d_{j1} \\ \vdots \\ d_{jr} \end{bmatrix},$$

gde $j \in \{1, \dots, n\}$. Dalje, formirajmo matricu $\mathsf{D} \in \mathbb{C}^{r\times n}$ redom od vektora $\vec{\mathsf{d}}_1, \dots, \vec{\mathsf{d}}_n$ u obliku

$$\mathsf{D} = \left[\, \vec{\mathsf{d}}_1 \dots \vec{\mathsf{d}}_n \,\right] = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{1r} & \dots & d_{nr} \end{bmatrix}.$$

Na osnovu $\vec{\mathsf{A}}^{[j]} = \mathsf{C} \cdot \vec{\mathsf{d}}_j$ $(j = 1, \dots, n)$ i prethodno formirane matrice D važi

$$\mathsf{A} = \mathsf{C} \cdot \mathsf{D}.$$

Primetimo da za matricu D, sa jedne strane važi

$$\mathrm{rang}(\mathsf{D}) \leq r$$

i sa druge strane važi

$$r = \mathrm{rang}(\mathsf{A}) = \mathrm{rang}(\mathsf{C} \cdot \mathsf{D}) \leq \min\{\mathrm{rang}(\mathsf{C}), \mathrm{rang}(\mathsf{D})\} \leq \mathrm{rang}(\mathsf{D}).$$

Sveukupno, ispunjeno je

$$\mathrm{rang}(\mathsf{D}) = r,$$

tj.

$$\mathsf{D} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 4.4. *Neka je data ne-nula matrica* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *ranga* $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ *sa faktorizacijom punog ranga*

$$\mathsf{A} = \mathsf{C} \cdot \mathsf{D},$$

gde je $\mathsf{C} \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ *i* $\mathsf{D} \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$. *Jedinstveno rešenje Penrouzovog sistema* $(1) - (4)$ *dato je Mak-Dafijevom formulom:*

$$\mathsf{A}^\dagger = \mathsf{D}^*(\mathsf{C}^*\mathsf{A}\mathsf{D}^*)^{-1}\mathsf{C}^*. \tag{6}$$

Dokaz. Za matricu $\mathsf{A} = \mathsf{C} \cdot \mathsf{D}$ posmatrajmo kvadratnu matricu

$$\mathsf{C}^*\mathsf{A}\mathsf{D}^* = \mathsf{C}^*\mathsf{C} \cdot \mathsf{D}\mathsf{D}^*.$$

Prvo dokazujemo regularnost te matrice. Dovoljno je dokazati da su kvadratne matrice $\mathsf{C}^*\mathsf{C}$ i $\mathsf{D}\mathsf{D}^*$, reda r, regularne. Poznato je iz Linearne algebre da za proizvoljnu matricu $\mathsf{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ važi

$$\mathrm{rang}(\mathsf{B}) = \mathrm{rang}(\mathsf{B}^*) = \mathrm{rang}(\mathsf{B}^*\mathsf{B}) = \mathrm{rang}(\mathsf{B}\mathsf{B}^*).$$

Samim tim $\mathsf{C}^*\mathsf{C} \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$ i $\mathsf{D}\mathsf{D}^* \in \mathbb{C}_r^{r\times r}$. Odatle, zaključujemo da postoji inverz

$$(\mathsf{C}^*\mathsf{A}\mathsf{D}^*)^{-1} = (\mathsf{C}^*\mathsf{C} \cdot \mathsf{D}\mathsf{D}^*)^{-1} = (\mathsf{D}\mathsf{D}^*)^{-1} \cdot (\mathsf{C}^*\mathsf{C})^{-1}.$$

Dalje, dokažimo da matrica

$$\mathsf{X} = \mathsf{D}^*(\mathsf{C}^*\mathsf{A}\mathsf{D}^*)^{-1}\mathsf{C}^* = \mathsf{D}^*(\mathsf{D}\mathsf{D}^*)^{-1} \cdot (\mathsf{C}^*\mathsf{C})^{-1}\mathsf{C}^*$$

ispunjava Penrouzove jednačine $(1) - (4)$. Proveravamo:

(1) $\quad \mathsf{A} \cdot \mathsf{X} \cdot \mathsf{A} = \mathsf{C}\mathsf{D} \cdot \mathsf{D}^*(\mathsf{D}\mathsf{D}^*)^{-1}(\mathsf{C}^*\mathsf{C})^{-1}\mathsf{C}^* \cdot \mathsf{C}\mathsf{D} = \mathsf{C} \cdot \mathsf{D} = \mathsf{A}$

(2) $\quad \mathsf{X} \cdot \mathsf{A} \cdot \mathsf{X} = \mathsf{X}$ - analogno

(3) $\quad (\mathsf{A} \cdot \mathsf{X})^* = (\mathsf{C}\mathsf{D} \cdot \mathsf{D}^*(\mathsf{D}\mathsf{D}^*)^{-1}(\mathsf{C}^*\mathsf{C})^{-1}\mathsf{C}^*)^* = (\mathsf{C}(\mathsf{C}^*\mathsf{C})^{-1}\mathsf{C}^*)^* = \mathsf{C}(\mathsf{C}^*\mathsf{C})^{-1}\mathsf{C}^* = \mathsf{A} \cdot \mathsf{X}$

(4) $\quad (\mathsf{X} \cdot \mathsf{A})^* = \mathsf{A} \cdot \mathsf{X}$ - analogno.

Sveukupno matrica X jeste rešenje Penrouzovog sistema $(1) - (4)$. Na osnovu Teoreme 4.2. rešenje je jedinstveno. Odatle zaključujemo $\mathsf{X} = \mathsf{A}^\dagger$. $\blacksquare$

5 Blok reprezentacije uopštenih inverza

Za matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ matrica $\mathsf{X} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ se naziva *uopšteni inverz* ukoliko ispunjava neku jednačinu iz sistema Penrouzovih jednačina $(1) - (4)$.

Polazimo od činjenice da se za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ primenom elementarnih transformacija na vrstama i kolonama proširena matrica (sa dve jedinične matrice kao što se navodi) može transformisati u ekvivaletnu matricu sledećeg oblika:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathsf{I}_m \\ \hline \mathsf{I}_n & \end{array}\right] \cong \dots \cong \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{E}_r & {\color{blue}\mathsf{Q}} \\ \hline {\color{red}\mathsf{P}} & \end{array}\right],$$

gde je $\mathsf{E}_r \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ matrica sa r jedinica na prvih r mesta glavne dijagonale i na svim ostalim mestima sa nula elementima, tada je $r = \mathrm{rang}(\mathsf{A})$. Podmatrice $\mathsf{Q} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $\mathsf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jesu regularne i važi

$$(*) \qquad {\color{blue}\mathsf{Q}}\, \mathsf{A}\, {\color{red}\mathsf{P}} = \mathsf{E}_r = \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ovako dobijena matrica E_r se naziva *normalna forma matrice* A. Napomenimo da matrice Q i P nisu jedinstvene. Za jedan izbor matrica Q i P rešenja pojedinih Penrouzovih jednačina $(1) - (4)$ tražimo u obliku

$$(**) \qquad \mathsf{X} = \mathsf{P} \begin{bmatrix} \mathsf{X}_0 & \mathsf{X}_1 \\ \mathsf{X}_2 & \mathsf{X}_3 \end{bmatrix} \mathsf{Q},$$

za neke submatrice $\mathsf{X}_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $\mathsf{X}_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $\mathsf{X}_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$, $\mathsf{X}_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$, koje nazivamo *blokovima*. Ukoliko je uopšteni inverz X dat u obliku $(**)$, tada kažemo da je *uopšteni inverz dat u obliku jedne blok reprezentacije*.

Važe sledeća tvrđenja o obliku uopštenih inverza.

Teorema 5.1. (opšti $\{1\}$-inverz)
Neka su za matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $\mathsf{Q} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $\mathsf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$. Matrica X oblika $(**)$ ispunjava prvu Penrouzovu jednačinu (1) ako i samo ako važi

$$\mathsf{X} = \mathsf{P} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{I}_r & \mathsf{X}_1 \\ \hline \mathsf{X}_2 & \mathsf{X}_3 \end{array}\right] \cdot \mathsf{Q},$$

gde su $\mathsf{X}_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $\mathsf{X}_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $\mathsf{X}_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljni blokovi.

Teorema 5.2. (opšti $\{2\}$-inverz)
Neka su za matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $\mathsf{Q} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $\mathsf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$. Matrica X oblika $(**)$ ispunjava drugu Penrouzovu jednačinu (2) ako i samo ako matrice $\mathsf{X}_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $\mathsf{X}_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$, $\mathsf{X}_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ i $\mathsf{X}_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ ispunjavaju matrične jednačine

$$\mathsf{X}_0^2 = \mathsf{X}_0 \ \wedge\ \mathsf{X}_0\mathsf{X}_1 = \mathsf{X}_1 \ \wedge\ \mathsf{X}_2\mathsf{X}_0 = \mathsf{X}_2 \ \wedge\ \mathsf{X}_3 = \mathsf{X}_2\mathsf{X}_1.$$

Teorema 5.3. (opšti $\{1,2\}$-inverz)
Neka su za matricu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $\mathsf{Q} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $\mathsf{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$. Matrica X oblika $(**)$ ispunjava prvu i drugu Penrouzovu jednačinu (1) i (2) ako i samo ako važi

$$\mathsf{X} = \mathsf{P} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathsf{I}_r & \mathsf{X}_1 \\ \hline \mathsf{X}_2 & \mathsf{X}_2\mathsf{X}_1 \end{array}\right] \cdot \mathsf{Q},$$

gde su $\mathsf{X}_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ i $\mathsf{X}_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ proizvoljni blokovi.

Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ elementarnim transformacijama iz $(*)$. Formirajmo blok matrice:

$$(\sharp) \qquad Q \cdot Q^* = \left[\begin{array}{c|c} S_1 & S_2 \\ \hline S_3 & S_4 \end{array}\right] \; (S_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}) \quad \text{i} \quad P^* \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right] \; (T_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}).$$

Pri tom dimenzionalno iz

$$S_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$$

sleduje

$$S_2 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}, \quad S_3 \in \mathbb{C}^{(m-r)\times r} \quad \text{i} \quad S_4 \in \mathbb{C}^{(m-r)\times(m-r)}.$$

Takođe dimenzionalno iz

$$T_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}$$

sleduje

$$T_2 \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}, \quad T_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r} \quad \text{i} \quad T_4 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(n-r)}.$$

Kvadratna matrica $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ je *ermitska matrica* ukoliko važi

$$B^* = B.$$

Važi pomoćno tvrđenje.

Lema 5.4. *Neka su za matricu* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *određene regularne matrice* $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takve da važi* $(*)$. *Tada*

1°. *Kvadratne matrice* $Q \cdot Q^*$ *i* $P^* \cdot P$ *su regularne i ermitske.*

2°. *Kvadratni blokovi* S_1 *i* T_1 *su ermitske matrice.*

3°. *Kvadratni blokovi* S_4 *i* T_4 *su regularne i ermitske matrice.*

4°. *Za blokove* S_2, S_3 *i* T_2, T_3 *važi* $S_2^* = S_3$ *i* $T_2^* = T_3$.

Na osnovu prethodnog pomoćnog tvrđenja navodimo simbolički

$$S_1^* = S_1, \quad S_2^* = S_3, \quad S_4^* = S_4 \;\; \text{i} \;\; (\exists\, S_4^{-1})$$

i

$$T_1^* = T_1, \quad T_2^* = T_3, \quad T_4^* = T_4 \;\; \text{i} \;\; (\exists\, T_4^{-1}).$$

Teorema 5.5. (opšti $\{3\}$-inverz)
Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *određene regularne matrice* $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takve da važi* $(*)$ *i neka je određena matrica* $Q \cdot Q^*$ *u vidu blok matrice* $(\sharp)$. *Matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *oblika* $(**)$ *ispunjava treću Penrouzovu matričnu jednačinu* (3) *ako i samo ako matrice* $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ *i* $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ *ispunjavaju matrične jednačine*

$$(S_1 - S_2 S_4^{-1} S_2^*)\, X_0^* = X_0\, (S_1 - S_2 S_4^{-1} S_2^*) \;\; \wedge \;\; X_1 = -X_0 S_2 S_4^{-1}.$$

Pri tom su blokovi $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ *i* $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ *proizvoljne matrice.*

Teorema 5.6. (opšti $\{1,3\}$-inverz)
Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *određene regularne matrice* $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *i* $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *takve da važi* $(*)$. *Matrica* X *oblika* $(**)$ *ispunjava prvu i treću Penrouzovu jednačinu* (1) *i* (3) *ako i samo ako važi*

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 S_4^{-1} \\ \hline X_2 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q,$$

gde su $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ *i* $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ *proizvoljni blokovi.*

Teorema 5.7. (opšti $\{1,2,3\}$-inverz)
Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$. Matrica X oblika $(**)$ ispunjava prvu, drugo i treću Penrouzovu jednačinu (1), (2) i (3) ako i samo ako važi

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline X_2 & -X_2S_2S_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q,$$

gde je $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ proizvoljni blok.

Teorema 5.8. (opšti $\{4\}$-inverz)
Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$ i neka je određena matrica $P^*{\cdot}P$ u vidu blok matrice $(\sharp)$. Matrica $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ oblika $(**)$ ispunjava četvrtu Penrouzovu matričnu jednačinu (4) ako i samo ako matrice $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ i $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ ispunjavaju matrične jednačine

$$X_0^*\,(T_1 - T_2T_4^{-1}T_2^*) = (T_1 - T_2T_4^{-1}T_2^*)\,X_0 \quad \wedge \quad X_2 = -T_3T_4^{-1}X_0.$$

Pri tom su blokovi $X_0 \in \mathbb{C}^{r\times r}$ i $X_2 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times r}$ proizvoljne matrice.

Teorema 5.9. (opšti $\{1,4\}$-inverz)
Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$. Matrica X oblika $(**)$ ispunjava prvu i četvrtu Penrouzovu jednačinu (1) i (4) ako i samo ako važi

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & X_3 \end{array}\right] \cdot Q,$$

gde su $X_1 \in \mathbb{C}^{r\times(m-r)}$ i $X_3 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljni blokovi.

Teorema 5.10. (opšti $\{1,2,4\}$-inverz)
Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$. Matrica X oblika $(**)$ ispunjava prvu, drugu i četvrtu Penrouzovu jednačinu (1), (2) i (4) ako i samo ako važi

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & X_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & -T_4^{-1}T_2\,X_1 \end{array}\right] \cdot Q,$$

gde je $X_1 \in \mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljni blok.

Teorema 5.11. ($\{1,2,3,4\}$-inverz)
Neka su za matricu $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ određene regularne matrice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ i $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da važi $(*)$. Matrica X oblika $(**)$ ispunjava prvu, drugu, treću i četvrtu Penrouzovu jednačinu (1), (2), (3) i (4) ako i samo ako važi

$$X = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2S_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & T_4^{-1}T_3S_2S_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q\,.$$

Primer 5.12. *Neka je data matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

1°. *Odrediti matrice Q i P tako da $QAP = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, za $r = \mathrm{rang}(A)$.*

2º. *Odrediti:*

(*i*) *opšti* $\{1\}$*-inverz,*

(*ii*) *opšti* $\{1,2\}$*-inverz,*

(*iii*) *opšti* $\{1,2,3\}$*-inverz,*

(*iv*) *opšti* $\{1,2,4\}$*-inverz*

(*v*) *Mur-Penrouzov inverz matrice* A.

Rešenje. 1º. Primenom elementarnih transforemacija na vrstama/kolonama dobijamo

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \qquad (I_2 := (-4)\cdot I_1 + I_2)$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \qquad (I_3 := (-7)\cdot I_1 + I_3)$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \qquad (I_3 := (-2)\cdot I_2 + I_3)$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$(J_2 := (-2)\cdot J_1 + J_2)$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$(J_2 := (-3)\cdot J_1 + J_2)$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & \mathbf{-6} & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -3 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$(J_3 := (-2)\cdot J_2 + J_3)$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \qquad I_2 := \left(-\tfrac{1}{3}\right)\cdot I_2$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -2 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right].$$

Samim tim za matrice

$$\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zaključujemo da važi

$$\mathsf{Q\,A\,P} = \mathsf{E}_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

čime je

$$r = \operatorname{rang}(\mathsf{A}) = 2\,.$$

2º. *(i)* Opšti $\{1\}$-inverz je dat kao matrica

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{P}\cdot\begin{bmatrix} \mathrm{I}_2 & \mathsf{X}_1 \\ \mathsf{X}_2 & \mathsf{X}_3 \end{bmatrix}\cdot\mathsf{Q} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ \hline \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(-\frac{5}{3}+\alpha-2\beta+\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(\frac{2}{3}-2\alpha+4\beta-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\alpha-2\beta+\varepsilon\right) \\ \left(\frac{4}{3}+\beta-2\gamma-\frac{8}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-2\beta+\frac{2}{3}\delta+4\varepsilon\right) & \left(\beta-2\varepsilon\right) \\ \left(\gamma+\dfrac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sa ukupno $N_1 = n\cdot m - r^2 = 3\cdot 3 - 2^2 = 5$ slobodnih parametara.

(ii) Opšti $\{1,2\}$-inverz je dat kao matrica

$$\begin{aligned}
\mathsf{X} = \mathsf{P}\cdot\begin{bmatrix} \mathrm{I}_2 & \mathsf{X}_1 \\ \mathsf{X}_2 & \mathsf{X}_2\mathsf{X}_1 \end{bmatrix}\cdot \mathsf{Q} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ \hline \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(-\frac{5}{3}+\alpha-2\beta+\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(\frac{2}{3}-2\alpha+4\beta+\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\alpha-2\beta+\varepsilon\right) \\ \left(\frac{4}{3}+\beta-2\gamma-\frac{8}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-2\beta+\frac{2}{3}\delta+4\varepsilon\right) & \left(\beta-2\varepsilon\right) \\ \left(\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sa nelinearnim članom

$$\varepsilon = \alpha\gamma + \beta\delta$$

i gde se javlja ukupno $N_{1,2} = (n+m)\cdot r - 2\cdot r^2 = 6\cdot 2 - 2\cdot 2^2 = 4$ slobodnih parametara.

(iii) Za određivanje opšteg $\{1,3\}$-inverza polazimo od matrice

$$\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

tako što prvo računamo

$$\mathsf{Q}\cdot\mathsf{Q}^* = \mathsf{Q}\cdot\mathsf{Q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{17}{9} & 2 \\ \hline 1 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Odatle su određeni blokovi

$$\mathsf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{17}{9} \end{bmatrix},\quad \mathsf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \mathsf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\ \text{ i }\ \mathsf{S}_4 = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}.$$

Za određivanje opšteg $\{1,3\}$-inverza računa se sledeći matrični proizvod

$$-\mathsf{S}_2\cdot\mathsf{S}_4^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Opšti $\{1,3\}$-inverz je matrica

$$\begin{aligned}
\mathsf{X} &= \mathsf{P}\cdot\begin{bmatrix} \mathrm{I}_2 & -\mathsf{S}_2\mathsf{S}_4^{-1} \\ \mathsf{X}_2 & \mathsf{X}_3 \end{bmatrix}\cdot\mathsf{Q} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(-\frac{7}{6}+\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \\ \left(1-2\gamma-\frac{8}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\delta+4\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-2\varepsilon\right) \\ \left(\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sa ukupno $N_{1,3} = (n-r)\cdot m = 1\cdot 3 = 3$ slobodnih parametara.

(iv) Za određivanje opšteg $\{1,4\}$-inverza polazimo od matrice

$$\mathsf{P}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

tako što prvo računamo

$$\mathsf{P}^*\cdot\mathsf{P}=\mathsf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathsf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 1\\ -2 & 5 & -4\\ \hline 1 & -4 & 6\end{array}\right].$$

Odatle su određeni blokovi

$$\mathsf{T}_1=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix},\ \ \mathsf{T}_2=\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix},\ \ \mathsf{T}_3=\begin{bmatrix}1 & -4\end{bmatrix}\ \text{ i }\ \mathsf{T}_4=\begin{bmatrix}6\end{bmatrix}.$$

Za određivanje opšteg $\{1,4\}$-inverza računa se sledeći matrični proizvod

$$-\mathsf{T}_4^{-1}\cdot\mathsf{T}_3=-\begin{bmatrix}6\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{6} & \dfrac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

Opšti $\{1,4\}$-inverz je matrica

$$\begin{aligned}
\mathsf{X}\ &=\ \mathsf{P}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{I}_2 & \mathsf{X}_1\\ -\mathsf{T}_4^{-1}\mathsf{T}_3 & \mathsf{X}_3\end{bmatrix}\cdot\mathsf{Q}\\
&=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & \beta\\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \varepsilon\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\left(-\frac{17}{18}+\alpha-2\beta+\varepsilon\right) & \left(\frac{4}{9}-2\alpha+4\beta-2\varepsilon\right) & \left(\alpha-2\beta+\varepsilon\right)\\ \left(-\frac{1}{9}+\beta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{9}-2\beta+4\varepsilon\right) & \left(\beta-2\varepsilon\right)\\ \left(\frac{13}{18}+\varepsilon\right) & \left(-\frac{2}{9}-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sa ukupno $N_{1,4}=n\cdot(m-r)=3\cdot 1=3$ slobodnih parametara.

(v) Za određivanje Mur-Penrouzovog inverza koristimo oznake i rezultate iz prethodnog. Jedinstveno određen Mur-Penrouzov inverz je dat sa matricom

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}^{\dagger}\ &=\ \mathsf{P}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{I}_2 & -\mathsf{S}_2\mathsf{S}_4^{-1}\\ -\mathsf{T}_4^{-1}\mathsf{T}_3 & \left(\mathsf{T}_4^{-1}\mathsf{T}_3\mathsf{S}_2\mathsf{S}_4^{-1}\right)\end{bmatrix}\cdot\mathsf{Q}\\
&=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{36}\end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{-\dfrac{23}{36}} & \boldsymbol{-\dfrac{1}{6}} & \boldsymbol{\dfrac{11}{36}}\\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{18}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\dfrac{1}{18}}\\ \boldsymbol{\dfrac{19}{36}} & \boldsymbol{\dfrac{1}{6}} & \boldsymbol{-\dfrac{7}{36}}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

6 Uopšteni inverzi matrica i linearni sistemi

Neka je dat linearan sistem

$$(*) \qquad Ax = b,$$

gde je $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrica sistema, $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ kolona slobodnih članova i $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ kolona nepoznatih. Neka je $A^b \in \mathbb{C}^{m\times(n+1)}$ proširena matrica sistema sa kolonom slobodnih članova. Važi tvrđenje.

Teorema 6.1. (Kroneker-Kapelijeva teorema)
Linearni sistem $(*)$ *je saglasn ako i samo ako važi*

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^b).$$

Osnovna veza između linearnih sistema i uopštenih inverznih matrica je data sa sledećim tvrđenjem.

Teorema 6.2. (Penrouzova teorema)
Za matricu sistema $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i kolonu slobodnih članova* $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ *linearni sistem* $(*)$ *je saglasan ako i samo ako važi*

$$AA^{(1)}b = b,$$

za ma koji $\{1\}$*-inverz* $A^{(1)}$ *matrice* A*. Ukoliko je sistem* $(*)$ *saglasan, tada je opšte rešenje linearnog sistema dato formulom*

$$x = x_0 + \left(I - A^{(1)}A \right) y,$$

gde je $x_0 \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ *neko partikularno rešenje linearnog sistema* $(*)$ *i gde je* $y \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ *proizvoljna kolona.*

Primer 6.3. *Za matricu sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

odrediti opšti oblik kolone slobodnih članova

$$b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

za koju je linearan sistem

$$Ax = b$$

saglasan sistem.

Rešenje. Važi

$$A^b = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & p \\ 4 & 5 & 6 & q \\ 7 & 8 & 9 & r \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & p \\ 0 & -3 & -6 & q-4p \\ 7 & 8 & 9 & r \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & p \\ 0 & \boxed{-3} & -6 & q-4p \\ 0 & -6 & -12 & r-7p \end{array}\right]$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & p \\ 0 & -3 & -6 & q-4p \\ 0 & 0 & 0 & r+p-2q \end{array}\right]$$

Saglasno Kroneker-Kapelijevoj teoremi posmatrani linearni sistem je saglasan ako i samo ako

$$r = 2q - p\,;$$

tj. ukoliko je

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ 2q-p \end{bmatrix},$$

za $p, q \in \mathbb{R}$. □

Primer 6.4. *Ispitati saglasnost linearnog sistema*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. I Način. Na osnovu prethodnog primera sleduje saglasnost datog linearnog sistema.
II Način. Za matricu sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

jedan $\{1\}$-inverz je upravo Mur-Penrouzov inverz

$$\mathsf{A}^{\dagger} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix}.$$

Za zadatu kolonu slobodnih članova

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

matričnim množenjem se proverava da je ispunjen potreban i dovoljan uslov saglasnosti

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{(1)}\mathsf{b} = \mathsf{b}\,.$$

□

7 Aproksimativna rešenja linearnih sistema

U ovom delu razmatraćemo linearne sisteme

$$(*) \qquad \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

u slučajevima kada su saglasni i kada nisu saglasni. Ukoliko linearni sistem $(*)$ nije saglasan tada vektor (matrica kolona) razlike

$$\mathsf{v} = \mathsf{A}\mathsf{x} - \mathsf{b},$$

$\left(\mathsf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \right)$, ispunjava

$$\mathsf{v} \neq \mathsf{0}\,,$$

za svaki izbor $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Samim tim

$$\|\mathsf{v}\| \neq 0\,,$$

za svaki izbor $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Ovde koristimo standardnu euklidsku normu vektora određenu sa $\|\mathsf{v}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}\,.$

1. Vektor x_0 jeste *srednje kvadratno rešenje* sistema linearnih jednačina $(*)$ ukoliko važi

$$(\forall \mathsf{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1})\; \|\mathsf{A}\mathsf{x}_0 - \mathsf{b}\| \le \|\mathsf{A}\mathsf{x} - \mathsf{b}\|\,.$$

Za polazni sistem lineranih jednačina $(*)$ ne zahtevamo saglasnost. Ukoliko je polazni sistem linearnih jednačina $(*)$ saglasan tada x_0 je jedno rešenje. Važi pomoćno tvrđenje.

Lema 7.1. *Neka je* $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *i* $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{m\times 1}$. *Tada za proizvoljni* $\{1,3\}$*-inverz* $\mathsf{A}^{(1,3)}$ *matrice* A *važi*

$$(\natural)\qquad \|\mathsf{A}\mathsf{x} - \mathsf{b}\|^2 = \|\mathsf{A}\mathsf{x} - \mathsf{A}\mathsf{A}^{(1,3)}\mathsf{b}\|^2 + \|\mathsf{b} - \mathsf{A}\mathsf{A}^{(1,3)}\mathsf{b}\|^2,$$

za proizvoljno $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$.

Specijalno, izborom $\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{(1,3)}\,\mathsf{b}$ i zamenom u prethodnu jednakost dobijamo procenu

$$\begin{aligned}
\|\mathsf{A}\mathsf{x}_0 - \mathsf{b}\|^2 &= \|\mathsf{A}\mathsf{x}_0 - \mathsf{A}\mathsf{A}^{(1,3)}\mathsf{b}\|^2 + \|\mathsf{b} - \mathsf{A}\mathsf{A}^{(1,3)}\mathsf{b}\|^2 \\
&= \|\mathsf{b} - \mathsf{A}\mathsf{A}^{(1,3)}\mathsf{b}\|^2 \\
&\underset{(\natural)}{\le} \|\mathsf{A}\mathsf{x} - \mathsf{b}\|^2,
\end{aligned}$$

za proizvoljno $\mathsf{x} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Odatle sleduje

Teorema 7.2. *Neka je data matrica* $\mathsf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ *i vektor* $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$. *Tada*

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{(1,3)}\,\mathsf{b}$$

predstavlja srednje kvadratno rešenje sistema linearnih jednačina $(*)$. *Obrnuto, ako za matricu* $\mathsf{M} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *važi da je za neko* $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$ *norma* $\|\mathsf{A}\mathsf{x}-\mathsf{b}\|$ *najmanja pri izboru* $\mathsf{x} = \mathsf{M}\mathsf{b}$, *tada je* $\mathsf{M}\in\mathsf{A}\{1,3\}$.

Primer 7.3. *Neka je dat sistem linearnih jednačina*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z &=& 1 \\ 4x + 5y + 6z &=& 2 \\ 7x + 8y + 9z &=& 5 \end{array}\right\}$$

Ispitati saglasnost sistema i odrediti srednje kvadratno rešenje.

Rešenje. Posmatrani sistem matrično zapisujemo

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

sa matricom sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

i kolonom slobodnih članova

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ovakav izbor kolone slobodih članova, saglasno Primeru 6.3., dovodi do nesaglasnog sistema $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$. Tražimo srednje kvadratno rešenje x_0.

I Način. Primenom teorije uopštenih inverza srednje kvadratno rešenje je određeno formulom

$$x_0 = A^{(1,3)}\, b\,,$$

za $A^{(1,3)}$ ma koji $\{1,3\}$-inverz. Prema Primeru 5.12., 2º./(iii), opšti $\{1,3\}$-inverz je dat sa matricom

$$\begin{aligned}
A^{(1,3)} &= P\cdot\begin{bmatrix} I_2 & -S_2S_4^{-1} \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}\cdot Q \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hline \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(-\frac{7}{6}+\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \\ \left(1-2\gamma-\frac{8}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\delta+4\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-2\varepsilon\right) \\ \left(\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

za $\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$. Odatle

$$x_0 = A^{(1,3)}b = \begin{bmatrix} \left(-\frac{7}{6}+\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right) \\ \left(1-2\gamma-\frac{8}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\delta+4\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}-2\varepsilon\right) \\ \left(\gamma+\frac{4}{3}\delta+\varepsilon\right) & \left(-\frac{1}{3}\delta-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\gamma+\frac{2}{3}\delta+2\varepsilon \\ -2\gamma-\frac{4}{3}\delta-4\varepsilon \\ \gamma+\frac{2}{3}\delta+2\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Primetimo

$$x_0 = A^{(1,3)}\, b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\frac{2}{3}+\gamma+\frac{2}{3}\delta+2\varepsilon} \\ \boldsymbol{-2\left(\gamma+\frac{2}{3}\delta+2\varepsilon\right)} \\ \boldsymbol{\gamma+\frac{2}{3}\delta+2\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{-2\,t} \\ \boldsymbol{t} \end{bmatrix},$$

za $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\gamma+\frac{2}{3}\delta+2\varepsilon}\in\mathbb{R}$. Za ovakav izbor x_0 dobijamo konstantan vektor razlike

$$v = Ax_0 - b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3}+\boldsymbol{t} \\ -2\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

za ma koje $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}$. Vrednost norme najmanje razlike iznosi

$$\|v\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0.816496\ldots\,.$$

II Način. Primenom teorije funkcija više promenljivih rešenje $\|v\|$ možemo da tražimo kao minimum funkcije

$$\Phi(x,y,z) = \sqrt{(x+2y+3z-1)^2+(4x+5y+6z-2)^2+(7x+8y+9z-5)^2}\,.$$

$\square$

Napomenimo da srednje kvadratno rešenje

$$x_0 = A^{(1,3)}\, b$$

ispunjava matričnu jednačinu

$$Ax = AA^{(1,3)}\, b.$$

Pokazujemo u narednom razmatranju da srednje kvadratno rešenje ispunjava još jednu matričnu jednačinu koja je bliska metodi najmanjih kvadrata.

Za sistem $(*)$ formiramo *normalan sistem linearnih jednačina*:

$$(**) \qquad \mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{A}^*\mathsf{b}.$$

Prethodno definisani normalni sistemi su vezani sa srednjim kvadratnim rešenjima polaznih sistema sa sledećim tvrđenjem.

Teorema 7.4. *Neka je dat sistem linearnih jednačina* $(*)$ *sa matricom sistema* $\mathsf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ *i kolonom slobodnih članova* $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$. *Tada* $\mathsf{x}_0\in\mathbb{C}^{n\times 1}$ *jeste srednje kvadratno rešenje sistema linearnih jednačina* $(*)$ *ako i samo ako je rešenje normalnog sistema linearnih jednačina* $(**)$.

Primer 7.5. *Naći srednje kvadratno rešenje linearnog sistema*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 1 \\ 4x+5y+6z &=& 2 \\ 7x+8y+9z &=& 5 \end{array} \right\}.$$

Rešenje. Posmatrani sistem matrično zapisujemo

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

sa matricom sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

i kolonom slobodnih članova

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ovakav izbor kolone slobodih članova, saglasno Primeru 6.3., dovodi do nesaglasnog sistema $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$. Tražimo srednje kvadratno rešenje

$$\mathsf{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

kao rešenje normalnog sistema linearnih jednačina

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{A}^*\mathsf{b} \iff & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \iff & \begin{bmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 108 \\ 90 & 108 & 126 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 53 \\ 60 \end{bmatrix} \\ \iff & \left[\begin{array}{ccc|c} 66 & 78 & 90 & 44 \\ 78 & 93 & 108 & 52 \\ 90 & 108 & 126 & 60 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Rešimo prethodni sistem zapisan preko proširene matrice sistema. Jedan način je da oduzmemo prvu vrstu od druge i treće vrste i potom eliminišemo treću vrstu:

$$A^b = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{66} & 78 & 90 & 44 \\ {\color{blue}78} & 93 & 108 & 52 \\ 90 & 108 & 126 & 60 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{66} & 78 & 90 & 44 \\ 12 & 15 & 18 & 7 \\ {\color{blue}90} & 108 & 126 & 60 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} 66 & 78 & 90 & 44 \\ \boxed{12} & 15 & 18 & 7 \\ {\color{blue}24} & 30 & 36 & 14 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} 66 & 78 & 90 & 44 \\ 12 & 15 & 18 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Odatle se nalazi srednje kvadratno rešenje

$$\mathsf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + t \\ -2t \\ t \end{bmatrix},$$

za $t \in \mathbb{R}$.

2. Dalje razmotrimo slučaj saglasnog sistema linearnih jednačina $(*)$. Vektor rešenja $\mathsf{x}_0 \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ sistema linearnih jednačina $(*)$ jeste *rešenje minimalne norme* ukoliko važi

$$(\forall \mathsf{x}\in\mathbb{C}^{m\times 1})\ \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \implies \|\mathsf{x}_0\| \leq \|\mathsf{x}\|\,.$$

Teorema 7.6. *Neka je data matrica* $\mathsf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ *i vektor* $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$. *Ako je sistem linearnih jednačina* $(*)$ *saglasan tada je rešenje minimalne norme dato u obliku*

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{(1,4)}\,\mathsf{b}$$

Obrnuto, ako za matricu $\mathsf{M} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *važi da za neko* $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ *vektor* $\mathsf{x} = \mathsf{M}\mathsf{b}$ *predstavlja rešenje minimalne norme sistema* $(*)$, *tada je* $\mathsf{M}\in\mathsf{A}\{1,4\}$.

Primer 7.7. *Naći rešenje minimalne norme sledećeg linearnog sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 1 \\ 4x + 5y + 6z & = & 2 \\ 7x + 8y + 9z & = & 3 \end{array}\right\}.$$

Rešenje. Posmatrani sistem matrično zapisujemo

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

sa matricom sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

i kolonom slobodnih članova

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ovakav izbor kolone slobodih članova, saglasno Primeru 6.3., dovodi do saglasnog sistema $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$. Tražimo rešenje minimalne norme.

I Način. Primenom teorije uopštenih inverza srednje kvadratno rešenje je određeno formulom

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{(1,4)}\,\mathsf{b}\,,$$

gde je $\mathsf{A}^{(1,4)}$ ma koji $\{1,4\}$-inverz. Prema Primeru 5.12., $2^{\text{o}}./(iv)$, opšti $\{1,4\}$-inverz je

$$\begin{aligned} \mathsf{X} &= \mathsf{P}\cdot\begin{bmatrix} \mathsf{I}_2 & \mathsf{X}_1 \\ -\mathsf{T}_4^{-1}\mathsf{T}_3 & \mathsf{X}_3 \end{bmatrix}\cdot\mathsf{Q} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ \hline -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \varepsilon \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{17}{18}+\alpha-2\beta+\varepsilon\right) & \left(\frac{4}{9}-2\alpha+4\beta-2\varepsilon\right) & \left(\alpha-2\beta+\varepsilon\right) \\ \left(-\frac{1}{9}+\beta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{9}-2\beta+4\varepsilon\right) & \left(\beta-2\varepsilon\right) \\ \left(\frac{13}{18}+\varepsilon\right) & \left(-\frac{2}{9}-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right) \end{bmatrix}$$

za $\alpha, \beta, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Odatle

$$x_0 = A^{(1,4)}b = \begin{bmatrix} \left(-\frac{17}{18}+\alpha-2\beta+\varepsilon\right) & \left(\frac{4}{9}-2\alpha+4\beta-2\varepsilon\right) & \left(\alpha-2\beta+\varepsilon\right) \\ \left(-\frac{1}{9}+\beta-2\varepsilon\right) & \left(\frac{1}{9}-2\beta+4\varepsilon\right) & \left(\beta-2\varepsilon\right) \\ \left(\frac{13}{18}+\varepsilon\right) & \left(-\frac{2}{9}-2\varepsilon\right) & \left(\varepsilon\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{18} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix}.$$

Vrednost minimalne norme iznosi

$$\|v\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{18} = 0.304290\ldots.$$

II Način. Nalazimo prvo sva rešenja sistema linearnih jednačina $(*)$ iz

$$A^b = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{array}\right]$$
$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \end{array}\right]$$
$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

u obliku

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}+t \\ -\frac{2}{3}-2t \\ t \end{bmatrix},$$

za $t\in\mathbb{R}$. Primenom diferencijalnog računa tražimo minimalnu vrednost norme $\|x\|$ kao minimum funkcije

$$\phi(t) = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}+t\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-2t\right)^2 + (t)^2}.$$

Nalazeći

$$\phi'(t) = \frac{108\,t-30}{6\sqrt{54\,t^2-30\,t+5}},$$

jednostavno se proverava da se u stacionarnoj tački

$$t_0 = \frac{5}{18}$$

dostiže minimalna vrednost norme

$$\|x_0\| = \phi(t_0) = \frac{\sqrt{30}}{18}.$$

□

3. Za sistem linearnih jednačina $(*)$ vektor

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{\dagger}\,\mathsf{b}$$

nazivamo *najboljim aproksimativnim rešenjem.* Osnovna osobina takvih rešenja je data sa sledećim tvrđenjem.

Teorema 7.8. *Neka je dat sistem linearnih jednačina* $(*)$ *sa matricom sistema* $\mathsf{A}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ *i kolonom slobodnih članova* $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$. *Među svim srednje kvadratnim rešenjima sistema* $(*)$ *vektor*

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{\dagger}\,\mathsf{b}$$

jeste jedinstveno određen vektor minimalne norme. Obrnuto, ako matrica $\mathsf{M}\in\mathbb{C}^{n\times m}$ *ima osobinu da za neko* $\mathsf{b}\in\mathbb{C}^{m\times 1}$ *vektor* $\mathsf{x}_0 = \mathsf{M}\mathsf{b}$ *jeste srednje kvadratno rešenje minimalne norme tog sistema, tada* $\mathsf{M} = \mathsf{A}^{\dagger}$.

Primer 7.9. *Naći najbolje aproksimativno rešenje sledećih sistema linearnih jednačina*

$$\textbf{\textit{(i)}}\quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 1\\ 4x+5y+6z &=& 2\\ 7x+8y+9z &=& 3 \end{array}\right\} \qquad\qquad \textbf{\textit{(ii)}}\quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 1\\ 4x+5y+6z &=& 2\\ 7x+8y+9z &=& 5 \end{array}\right\}.$$

Rešenje. ***(i)*** Posmatrani sistem matrično zapisujemo

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

sa matricom sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

i kolonom slobodnih članova

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ovakav izbor kolone slobodih članova, saglasno Primeru 6.3., dovodi do saglasnog sistema $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$. Najbolje aproksimativno rešenje je

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{\dagger}\,\mathsf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36}\\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18}\\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{18}\\ \frac{1}{9}\\ \frac{5}{18} \end{bmatrix},$$

sa minimalnom vrednošću norme

$$\|\mathsf{x}_0\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{5}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{18} = 0.304290\ldots.$$

Primetimo da se dobijeni rezultat, usled saglasnosti sistema, podudara sa rezultatom iz Primera 7.7.

(ii) Posmatrani sistem matrično zapisujemo

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

sa matricom sistema

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

i kolonom slobodnih članova

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ovakav izbor kolone slobodih članova, saglasno Primeru 6.3., dovodi do nesaglasnog sistema $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$. Najbolje aproksimativno rešenje je

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^\dagger\,\mathsf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{23}{36} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{36} \\ -\frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{18} \\ \frac{19}{36} & \frac{1}{6} & -\frac{7}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix},$$

sa minimalnom vrednošću norme

$$\|\mathsf{x}_0\| = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{9} = 0.608580\ldots.$$

Primetimo da se dobijeni rezultat, usled nesaglasnosti sistema, podudara sa rezultatom iz Primera 7.3. ukoliko u rešenju *I Načina* za vektor srednjeg kvadratnog rešenja

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}$$

nađemo vrednost parametra t_0 za koju dobijamo x_0 sa najkraćim rastojanjem do koordinatnog početka. Primenom diferencijalnog računa tražimo minimalnu vrednost norme $\|\mathsf{x}\|$ kao minimum funkcije

$$\varphi(t) = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + t\right)^2 + (-2t)^2 + (t)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + t\right)^2 + 5t^2}.$$

Nalazeći

$$\varphi'(t) = \frac{108\,t + 12}{6\sqrt{54\,t^2 + 12\,t + 4}},$$

jednostavno se proverava da se u stacionarnoj tački

$$t_0 = -\frac{1}{9}$$

dostiže minimalna vrednost norme

$$\|\mathsf{x}_0\| = \varphi(t_0) = \frac{\sqrt{30}}{9} = 0.608580\ldots.$$

□

8 Sistemi punog ranga i sistemi sa rang defektom

Neka je data matrica $\mathsf{A} \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ i kolona slobodnih članova $\mathsf{b} \in \mathbb{C}^{m\times 1}$. Sistem linearnih jednačina

$$(*) \qquad \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

jeste *sistem punog ranga* ukoliko važi

$$r = \mathrm{rang}(\mathsf{A}) = \min\{m, n\}.$$

Teorema 8.1. *Za sistem* $(*)$ *koji je punog ranga najbolje aproksimativno rešenje*

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^\dagger \mathsf{b}$$

može se, na osnovu Mak-Dafijeve formule, odrediti u dva oblika upotrebom inverznih matrica

(*i*) $\boldsymbol{r = n}$:

$$\mathsf{x}_0 = \underbrace{(\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^*}_{\mathsf{A}^\dagger}\,\mathsf{b}\,,$$

(*ii*) $\boldsymbol{r = m}$:

$$\mathsf{x}_0 = \underbrace{\mathsf{A}^*(\mathsf{A}\mathsf{A}^*)^{-1}}_{\mathsf{A}^\dagger}\,\mathsf{b}\,.$$

Prvo razmatrani slučaj:

$$\boldsymbol{r = n < m}$$

nazivamo *slučaj predeterminisanog sistema* (r je jednako broju kolona).

Drugo razmatrani slučaj:

$$\boldsymbol{r = m < n}$$

nazivamo *slučaj nedeterminisanog sistema* (r je jednako broju vrsta).

Pored sistema punog ranga razmatranih u prethodna dva slučaja moguće je da važi:

$$r = \text{rang}(\mathsf{A}) < \min\{m, n\}\,.$$

Takve sisteme nazivamo *sistemi sa rang defektom.* U tom slučaju matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A} \in \mathbb{C}_r^{n\times n}$ i $\mathsf{A}\mathsf{A}^* \in \mathbb{C}_r^{m\times m}$ jesu kvadratne singularne matrice i najbolje aproksimativno rešenje

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^\dagger \mathsf{b}$$

nije moguće odrediti upotrebom inverznih matrica.

Primer 8.2. *Za predeterminisan linearan sistem*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 2y & = & 6 \\ 2x - \;\, y & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right\}$$

odrediti najbolje aproksimativno rešenje.

Rešenje. Radi se o linearnom sistemu

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b},$$

sa matricom sistema i kolonom slobodnih članova

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posmatrani sistem je predeterminisan jer je

$$r = \text{rang}(\mathsf{A}) = 2 = n\ (< 3 = m\,)\,.$$

Najbolje aproksimativno rešenje određujemo po formuli

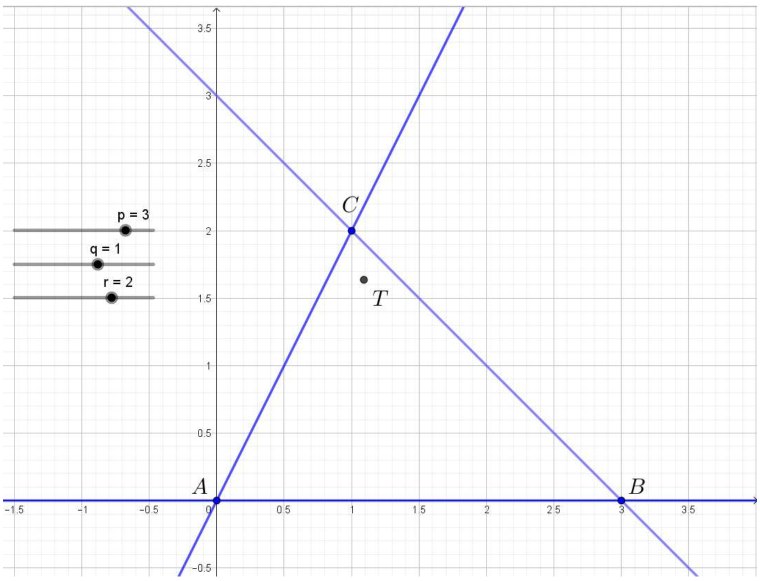
$$\mathsf{x}_0 = (\mathsf{A}^*\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^*\mathsf{b}\,.$$

Konkretno

$$\begin{aligned}
x_0 &= (A^*A)^{-1}A^*b \\
&= \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^\dagger}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{22} & -\frac{1}{22} \\ -\frac{1}{22} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{7}{22} & -\frac{1}{22} \\ \frac{3}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}}_{A^\dagger}\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{18}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.\overline{09} \\ 1.\overline{63} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Za prethodno konkretno određeno najbolje aproksimativno rešenje x_0 dobijamo vektor razlike

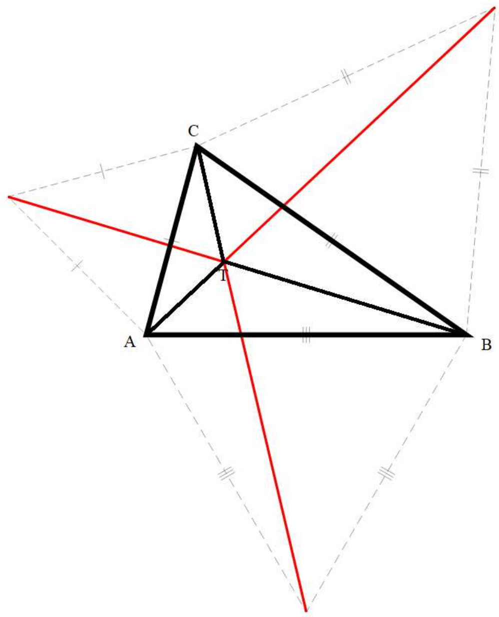
$$v = Ax_0 - b = \begin{bmatrix} -\frac{6}{11} \\ \frac{6}{11} \\ \frac{18}{11} \end{bmatrix} \text{ \textit{najmanje norme} } \|v\| = \sqrt{\left(-\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{18}{11}\right)^2} = \frac{6\sqrt{11}}{11} = 1.809068\ldots .$$



T - tačka najboljeg aproksimativnog rešenja

□

Napomena o lokacijskim problemima. Tačka koja ima minimalnu sumu rastojanja do temena trougla $\triangle ABC$ je peta značajna tački trougla tzv. *Ferma-Toričelijeva tačka* T i u vezi sa tim prirodno se javljaju brojni lokacijski problemi.



Ferma-Toričelijeva tačka trougla.

Primer 8.3. *Za nedeterminisan linearan sistem*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+5y+3z-8w &=& -2 \\ 2x+8y-2z+\ w &=& 1 \end{array}\right\}$$

odrediti najbolje aproksimativno rešenje.

Rešenje. Radi se o linearnom sistemu

$$\mathsf{A}\mathsf{x}=\mathsf{b},$$

sa matricom sistema i kolonom slobodnih članova

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -8 \\ 2 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{b}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Posmatrani sistem je nedeterminisan jer je

$$r=\operatorname{rang}(\mathsf{A})=2=m\ (<4=n\,).$$

Najbolje aproksimativno rešenje određujemo po formuli

$$\mathsf{x}_0=\mathsf{A}^*(\mathsf{A}\mathsf{A}^*)^{-1}\,\mathsf{b}\,.$$

Konkretno

$$\begin{aligned}\mathsf{x}_0 &= \mathsf{A}^*(\mathsf{A}\mathsf{A}^*)^{-1}\,\mathsf{b} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 3 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -8 \\ 2 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 3 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}}_{\mathsf{A}^{\dagger}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 3 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 99 & 28 \\ 28 & 73 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \\ 3 & -2 \\ -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{73}{6443} & -\frac{28}{6443} \\ -\frac{28}{6443} & \frac{99}{6443} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{379} & \frac{10}{379} \\ \frac{141}{6443} & \frac{652}{6443} \\ \frac{275}{6443} & -\frac{282}{6443} \\ -\frac{36}{379} & \frac{19}{379} \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}^{\dagger}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{379} \\ \frac{370}{6443} \\ -\frac{832}{6443} \\ \frac{91}{379} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.021108\ldots \\ 0.057426\ldots \\ -0.129132\ldots \\ 0.240105\ldots \end{bmatrix},$$

pri tom

$$\|\mathsf{x}_0\| = \sqrt{\Big(\frac{8}{379}\Big)^2 + \Big(\frac{370}{6443}\Big)^2 + \Big(-\frac{832}{6443}\Big)^2 + \Big(\frac{91}{379}\Big)^2} = \frac{\sqrt{3240829}}{6443} = 0.279408\ldots.$$

Za prethodno konkretno određeno najbolje aproksimativno rešenje x_0 dobijamo nulti vektor razlike

$$\mathsf{v} = \mathsf{A}\mathsf{x}_0 - \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

tj. vektor x_0 je ono rešenje čija je norma $\|\mathsf{x}_0\|$ minimalna. Inače, standardnim metodama linearne algebre sva rešenja polaznog saglasnog linearnog sistema su data sa

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} + 17u - \frac{69}{2}v \\ -\frac{5}{2} - 4u + \frac{17}{2}v \\ u \\ v \end{bmatrix},$$

za neko $u, v \in \mathbb{R}$. Primenom teorije funkcija dve promenljive minimalnu vrednost norme $\|\mathsf{x}\|$ možemo da tražimo i kao minimum funkcije

$$\Psi(u,v) = \sqrt{\Big(\frac{21}{2} + 17u - \frac{69}{2}v\Big)^2 + \Big(-\frac{5}{2} - 4u + \frac{17}{2}v\Big)^2 + u^2 + v^2},$$

po $u, v \in \mathbb{R}$. Iz sistema $\frac{\partial}{\partial u}\Psi(u,v) = 0$ i $\frac{\partial}{\partial v}\Psi(u,v) = 0$ se dobijaju vrednosti $u = -\frac{832}{6443}$ i $v = \frac{91}{379}$ u kojima funkcija $\Psi(u,v)$ dostiže prethodno određen minimum $\|\mathsf{x}_0\| = \frac{\sqrt{3240829}}{6443} = 0.279408\ldots.$ $\square$

Primer 8.4. *Za linearan sistem*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & - & z & + & 2\,w & = & -1 \\ x & + & y & + & z & - & w & = & 2 \\ & - & y & - & 2\,z & + & 3\,w & = & -3 \\ 5\,x & + & 2\,y & - & z & + & 4\,w & = & 1 \\ -x & + & 2\,y & + & 5\,z & - & 8\,w & = & 7 \end{array}\right\}$$

odrediti najbolje aproksimativno rešenje.

Rešenje. Radi se o linearnom sistemu

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b},$$

sa matricom sistema i kolonom slobdnih članova

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Posmatrani sistem je sa rang defektom jer je

$$r = \operatorname{rang}(\mathsf{A}) = 2 < 4 = \min\{m, n\} = \min\{5, 4\}\,.$$

Najbolje aproksimativno rešenje određujemo po formuli

$$\mathsf{x}_0 = \mathsf{A}^{\dagger}\,\mathsf{b}\,.$$

Konkretno, vektor najboljeg aproksimativnog rešenja

$$\mathsf{x}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{17}{995} & \frac{83}{1990} & -\frac{49}{1990} & \frac{134}{995} & \frac{32}{995} \\ \frac{13}{1990} & \frac{61}{1990} & -\frac{24}{995} & \frac{161}{1990} & \frac{83}{1990} \\ -\frac{4}{995} & \frac{39}{1990} & -\frac{47}{1990} & -\frac{27}{995} & \frac{51}{995} \\ \frac{29}{1990} & -\frac{17}{1990} & \frac{23}{995} & \frac{53}{1990} & -\frac{121}{1990} \end{bmatrix}}_{\mathsf{A}^{\dagger}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

je sa minimalnom normom

$$\|\mathsf{x}_0\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1\,.$$

Napomena o računanju Mur-Penrouzovog inverza. Ukoliko je matrica A sa rang defektom, tada za određivanje Mur-Penrouzovog inverza se koriste neke formule za određivanje poput Mak Dafijeve formule ili blok reprezentacije. U savremenim računarskim paketima postoje gotove funkcije za određivanje Mur-Penrouzovog inverza. Konkretno u `Matlab`-u, koji se najčešće koristi za inženjerske potrebe, u pitanju je naredba `pinv` koja daje Mur-Penrouzov inverz u decimalskom obliku.

9 Metoda najmanjih kvadrata

Polinomska regresija. Neka je dato $m-$merenja $\begin{array}{c|cccc} \boldsymbol{\alpha} & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_m \\ \hline \boldsymbol{\beta} & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m \end{array}$ i neka je n (formalni) stepen polinoma kojim određujemo polinomsku regresiju.
Pretpostavljamo

$$m > n+1 \quad \text{i} \quad \text{bar } n+1 \text{ vrednost niza } (\alpha_j)_{j=1}^{m} \text{ se međusobno razlikuju.}$$

Prethodna konjunkcija navedena dva uslova predstavlja *uslov za predeterminisanost.* U daljem razmatranju neka su $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_1, \gamma_0 \in \mathbb{R}$ koeficijenti polinoma $\gamma_n x^n + \gamma_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \gamma_1 x + \gamma_0$. Tada za polazne podatke $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ postoji niz realnih brojeva $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tako da je

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_1 & = & \gamma_n \alpha_1^n + \gamma_{n-1} \alpha_1^{n-1} + \ldots + \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_0 \ + \ \delta_1, \\ \beta_2 & = & \gamma_n \alpha_2^n + \gamma_{n-1} \alpha_2^{n-1} + \ldots + \gamma_1 \alpha_2 + \gamma_0 \ + \ \delta_2, \\ \vdots & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \beta_m & = & \gamma_n \alpha_m^n + \gamma_{n-1} \alpha_m^{n-1} + \ldots + \gamma_1 \alpha_m + \gamma_0 + \delta_m. \end{array} \right\}$$

Za podatke $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$ formirajmo *matricu sistema*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \ldots & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^n & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_m^n & \alpha_m^{n-1} & \ldots & \alpha_m & 1 \end{bmatrix}_{m \times (n+1)}$$

i *kolonu mernih podataka*

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Definšimo *osnovni problem polinomske regresije* kao određivanje vektora koeficijenata*)

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \vdots \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$$

tako da se x određuje iz predeterminisanog linearnog sistema

$$\mathsf{A}\,\mathsf{x} = \mathsf{b}$$

kao najbolje aproksimativno rešenje

$$\mathsf{x} = \mathsf{A}^{\dagger}\,\mathsf{b}.$$

Takvo rešenje se dobija rešavanjem normalnog sistema

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{b}$$

koje je moguće direktnim rešavanjem takvog saglasnog sistema ili matrično $\mathsf{x} = \left(\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\right)^{-1}\mathsf{b}$.
Vektor x ostvaruje minimalnost normi samog vektora $\|\mathsf{x}\|$ i vektora razlike $\|\mathsf{v}\| = \|\mathsf{A}\mathsf{x} - \mathsf{b}\|$.

*) zapisanih u opadajućem redosledu indeksa

Primer 9.1. *Odrediti linearne regresije za sledeće skupove podataka*

(i)

$\boldsymbol{\alpha}$	2	−2	4
$\boldsymbol{\beta}$	2	0	3

(ii)

$\boldsymbol{\alpha}$	−1	0	1
$\boldsymbol{\beta}$	0	1	−1

(iii)

$\boldsymbol{\alpha}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{\beta}$	0.651	0.762	0.856	1.063	1.190	1.298	1.421	1.440

i odrediti predikciju vrednosti $y(9)$.

Rešenje. U ovom zadatku posmatramo linearne regresione modele

$$y = \gamma_1 x + \gamma_0 \,.$$

Za linearne regresione modele matrica sistema je

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & 1 \end{bmatrix},$$

vektor slobodnih članova je

$$\mathsf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

i vektor koeficijenata linearne regresije je

$$\mathsf{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

(i) Konkretno iz

$\boldsymbol{\alpha}$	2	−2	4
$\boldsymbol{\beta}$	2	0	3

određujemo

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

Na taj način dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\,\gamma_1 + \gamma_0 &=& 2 \\ -2\,\gamma_1 + \gamma_0 &=& 0 \\ 4\,\gamma_1 + \gamma_0 &=& 3 \end{array} \right\}$$

za koji se neposredno proverava

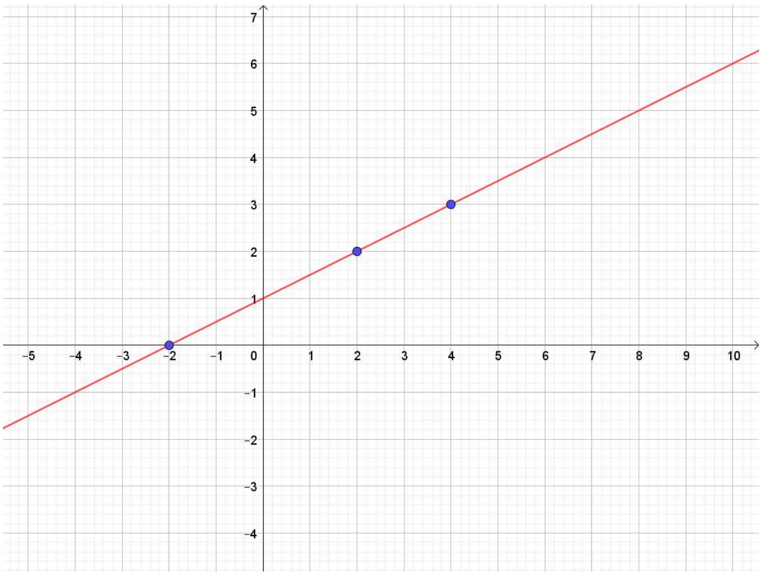
$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} - \text{saglasan sistem}$$

i odatle određujemo koeficijente prave

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_0 = 1 \,.$$

Ovim je određena regresiona prava

$$y = \gamma_1\, x + \gamma_0 = \frac{1}{2}\, x + 1\,.$$



Regresiona prava $y = \dfrac{1}{2}\,x + 1$

(ii) Konkretno iz

$\boldsymbol{\alpha}$	-1	0	1
$\boldsymbol{\beta}$	0	1	-1

određujemo

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

Na taj način dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcr} -\gamma_1 + \gamma_0 & = & 0 \\ \gamma_0 & = & 1 \\ \gamma_1 + \gamma_0 & = & -1 \end{array} \right\}$$

za koji se neposredno proverava

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} - \text{nesaglasan sistem.}$$

Za određivanje koeficijenata prave posmatrajmo saglasan normalan sistem linearnih jednačina

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{x} = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathsf{b}$$

koji konretno glasi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tj.

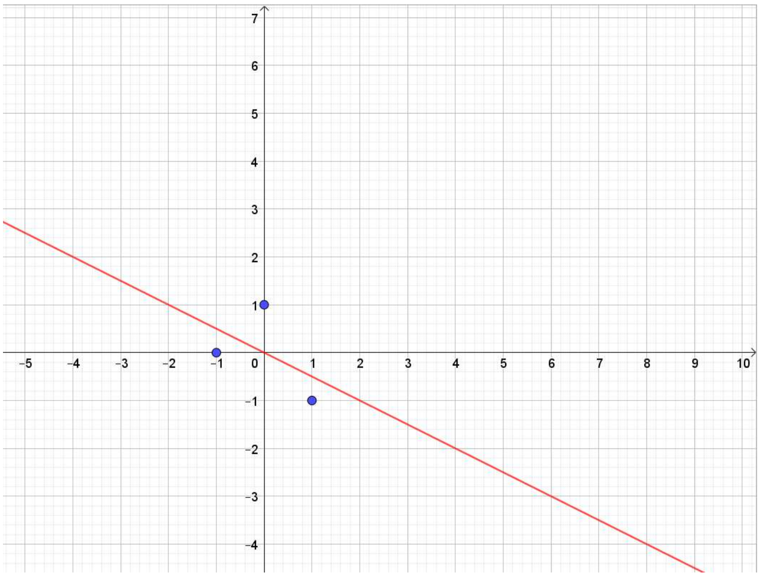
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcr} 2\,\gamma_1 & = & -1 \\ 2\,\gamma_0 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Odatle dobijamo koeficijente prave

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_0 = 0\,.$$

Ovim je određena regresiona prava

$$y = \gamma_1\,x + \gamma_0 = -\frac{1}{2}\,x\,.$$



Regresiona prava $y = -\frac{1}{2}\,x$

(iii) Konkretno iz

$\boldsymbol{\alpha}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{\beta}$	0.651	0.762	0.856	1.063	1.190	1.298	1.421	1.440

određujemo

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 0.651 \\ 0.762 \\ 0.856 \\ 1.063 \\ 1.190 \\ 1.298 \\ 1.421 \\ 1.440 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{x} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

Na taj način dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.651 \\ 0.762 \\ 0.856 \\ 1.063 \\ 1.190 \\ 1.298 \\ 1.421 \\ 1.440 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \gamma_1 + \gamma_0 & = & 0.651 \\ 2\,\gamma_1 + \gamma_0 & = & 0.762 \\ 3\,\gamma_1 + \gamma_0 & = & 0.856 \\ 4\,\gamma_1 + \gamma_0 & = & 1.063 \\ 5\,\gamma_1 + \gamma_0 & = & 1.190 \\ 6\,\gamma_1 + \gamma_0 & = & 1.298 \\ 7\,\gamma_1 + \gamma_0 & = & 1.421 \\ 8\,\gamma_1 + \gamma_0 & = & 1.440 \end{array} \right\}$$

za koji se neposredno proverava

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \text{ -- nesaglasan sistem.}$$

Za određivanje koeficijenata prave posmatrajmo saglasan normalan sistem linearnih jednačina

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{x} = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathsf{b}$$

koji konretno glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.651 \\ 0.762 \\ 0.856 \\ 1.063 \\ 1.190 \\ 1.298 \\ 1.421 \\ 1.440 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 204 & 36 \\ 36 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.200 \\ 8.681 \end{bmatrix}$$

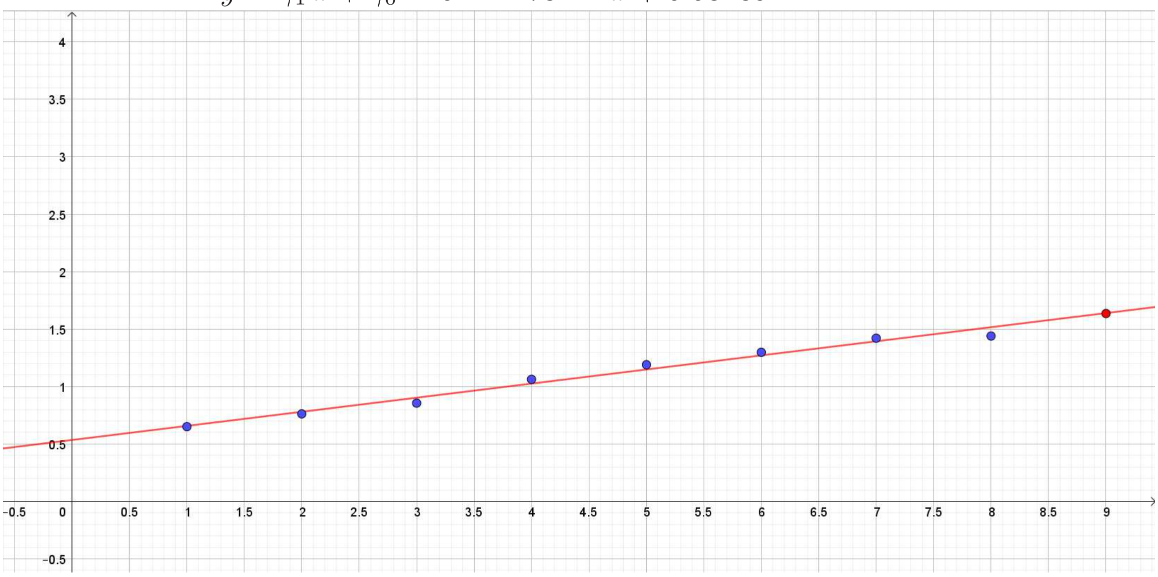
$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} 204\,\gamma_1 + 36\,\gamma_0 & = 44.200 \\ 36\,\gamma_1 + 8\,\gamma_0 & = \;\; 8.681 \end{array} \right\}.$$

Odatle dobijamo koeficijente prave

$$\gamma_1 = \frac{10271}{8400} = 0.122273\ldots, \quad \gamma_0 = \frac{14977}{28000} = 0.534892\ldots.$$

Ovim je određena regresiona prava

$$y = \gamma_1\, x + \gamma_0 = 0.122273\ldots\, x + 0.534892\ldots.$$



Regresiona prava $y = 0.122273\ldots\, x + 0.534892\ldots$

Tražena predikcija vrednosti [b] $y(9)$ je data aproksimacijom

$$y(9) \approx \hat{y}(9) = 0.122273\ldots \cdot 9 + 0.534892\ldots = 1.635357\ldots.$$

□

[b] inače tačna vrednost je bila $y(9) = 1.518$ milijardi eu. prodate robe od stane BENETTONa u devetoj godini poslovanja

Minimalnost sume kvadrata. Primetimo da je standardna euklidska norma vektora razlike određena sa

$$\begin{aligned}
\|\mathsf{v}\| = \|\mathsf{A}\mathsf{x} - \mathsf{b}\| &= \left\| \left[x_i^{n-j+1} \right]_{m\times(n+1)} \cdot [\gamma_{n-i+1}]_{(n+1)\times 1} - [y_i]_{m\times 1} \right\| \\
&= \left\| \left[\sum_{j=1}^{n+1} \gamma_{n-j+1} x_i^{n-j+1} - y_i \right]_{m\times 1} \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \gamma_{n-j+1} x_i^{n-j+1} - y_i \right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\hat{y}_i - y_i)^2} \, ,
\end{aligned}$$

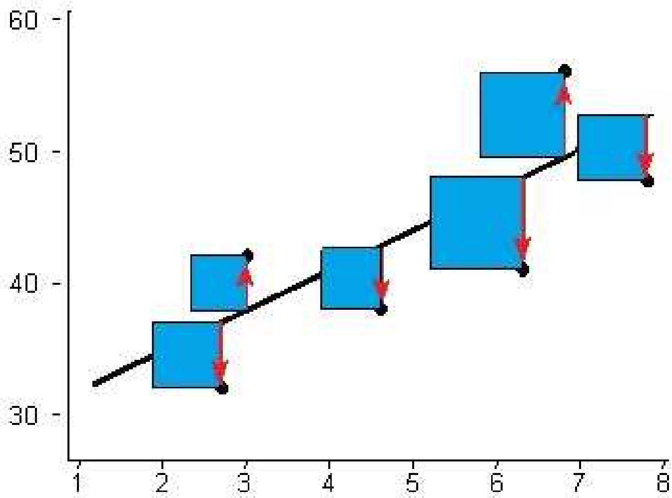
gde je

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_{n-j+1} x_i^{n-j+1} \qquad (i = 1, \ldots, m) \, .$$

Prethodno određenje norme vektora razlike dopušta u slučaju da je x najbolje aproksimativno rešenje intepretaciju preko minimalnosti razmatrane sume kvadrata. U tom slučaju smatramo da je

$$\varepsilon = \|\mathsf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

veličina *srednje kvadratne greške* pri polinomskoj aproksimaciji.



Regresiona prava i kvadrati u mernim tačkama.

Primer 9.2. *Odrediti kvadratne regresije*

$$y = \gamma_2 \, x^2 + \gamma_1 \, x + \gamma_0$$

za sledeće skupove podataka

(i)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	6	3	1	2	5

(ii)

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-1	2	0	-2	1

Odrediti i vrednost srednje kvadratne greške tako određenih regresija.

Rešenje. (i) Određujemo

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathsf{x} = \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}.$$

Na taj način dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \iff \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4\gamma_2 - 2\gamma_1 + \gamma_0 &=& 6 \\ \gamma_2 - \gamma_1 + \gamma_0 &=& 3 \\ \gamma_0 &=& 1 \\ \gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_0 &=& 2 \\ 4\gamma_2 + 2\gamma_1 + \gamma_0 &=& 5 \end{array} \right\}$$

za koji se neposredno proverava

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \text{ – nesaglasan sistem.}$$

Za određivanje koeficijenata parabole posmatrajmo saglasan normalan sistem linearnih jednačina

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\,\mathsf{x} = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathsf{b}$$

koji konkretno glasi

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

tj.

$$\begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ -3 \\ 17 \end{bmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 34\,\gamma_2 + 10\,\gamma_0 &=& 49 \\ 10\,\gamma_1 &=& -3 \\ 10\,\gamma_2 + 5\,\gamma_0 &=& 17 \end{array} \right\}.$$

Odatle dobijamo koeficijente

$$\gamma_2 = \frac{15}{14}, \quad \gamma_1 = -\frac{3}{10}, \quad \gamma_0 = \frac{44}{35}.$$

Formirajmo aproksimacionu funkciju pomoću prethodno određenih vrednosti parametara

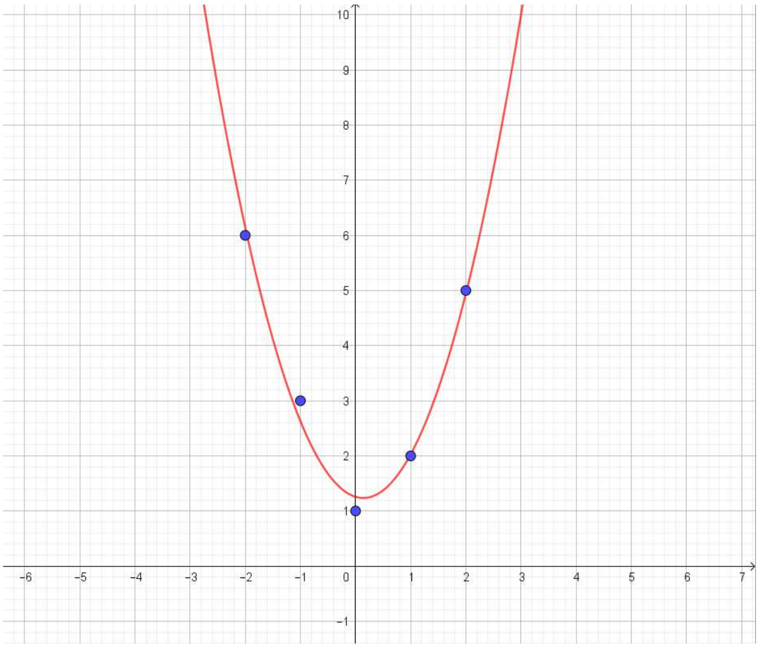
$$\Phi(x) = \gamma_2\,x^2 + \gamma_1\,x + \gamma_0 = \frac{15}{14}\,x^2 - \frac{3}{10}\,x + \frac{44}{35}.$$

Tabelirajući

x_i	-2	-1	0	1	2
$\hat{y}_i$	$\frac{43}{7}$	$\frac{92}{35}$	$\frac{44}{35}$	$\frac{71}{35}$	$\frac{173}{35}$

gde je $\hat{y}_i = \Phi(x_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, zaključujemo da u tom slučaju srednja kvadratna greška iznosi

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (y_i - \hat{y}_i)^2} = 0.478091\ldots.$$



Regresiona parabola $y = \dfrac{15}{14}x - \dfrac{3}{10}x + \dfrac{44}{35}$

(ii) $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma_0 = 0$ i $\varepsilon = 3.162277\ldots.$ $\square$

Nepolinomske regresije. U ovom delu razmotrićemo samo neke primere metoda svođenja dvoparametarskih regresija

$$y = \hat{f}(x, a, b),$$

po realnim parametrima a i b, pogodnim smenama promenljivih

$$X = X(x, y),\ Y = Y(x, y)$$

na linearnu regresiju

$$y = Ax + B.$$

Pri tom osnovni problem je da se odredi sa tim smenama koeficijenti linearne regresije

$$A = A(a, b) \quad \text{i} \quad B = B(a, b).$$

Primer 9.3. *Svesti sledeće regresije na odgovarajuću linearnu:*

(i) $y = b\,x^a \quad \big(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^+\big),$

(ii) $y = b\,a^x \quad \big(a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}^+\big),$

(iii) $y = \dfrac{a}{x} + b \quad \big(a,\ b \in \mathbb{R}\big).$

Rešenje. ***(i)*** Za merne podatke (x_i, y_i) pretpostavljamo da su pozitivni i da važi

$$y_i = b\, x_i^a.$$

Odatle logaritmovanjem

$$\ln y_i = a \ln x_i + \ln b$$

dobijamo

$$Y_i = A\, X_i + B,$$

za

$$Y_i = \ln y_i,\ X_i = \ln x_i, A = a, B = \ln b\,.$$

(ii) Za merne podatke (x_i, y_i) pretpostavljamo da su pozitivni po drugoj koordinati i da važi

$$y_i = b\, a^{x_i}.$$

Odatle logaritmovanjem

$$\ln y_i = (\ln a)\, x_i + \ln b$$

dobijamo

$$Y_i = A\, X_i + B,$$

za

$$Y_i = \ln y_i,\ X_i = x_i, A = \ln a, B = \ln b\,.$$

(iii) Za merne podatke (x_i, y_i) pretpostavljamo da važi

$$y_i = a\frac{1}{x} + b\,.$$

Odatle dobijamo

$$Y_i = A\, X_i + B,$$

za

$$Y_i = y_i,\ X_i = \frac{1}{x_i}, A = a, B = b\,.$$

10 Koeficijnt determinacije R^2

U praksi se najčešće koriste linearne regresije i dvoparametarske regresije koje se svode na linearnu regresiju. Ukoliko se razmatra n mernih podataka

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\boldsymbol{y}$	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

za linarnu regresiju

$$y = a\,x + b$$

mogu se izvesti sledeće formule za koeficijente linearne regresije

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \right)^2} \quad \text{i} \quad b = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} a\,.$$

Specifično za linearnu regresiju $y = ax + b$ jeste da se za meru linearnosti uzima koeficijent determinacije R^2 koji se određuje izrazom

$$R^2 = \frac{a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b\sum_{i=1}^{n} y_i - n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{n}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{n}\right)^2}\,.$$

Vrednosti koeficijenta determinacije su

$$0 \le R^2 \le 1\,.$$

Model je sa linearnom regresijom ukoliko je R^2 blisko jedinici. U vezi sa tim navodimo tumačenje mere linearnosti koje se određuje standardnom Čadočkovom skalom

R^2	*tumačenje*
$[0.00, 0.01]$	*odsutnost linearne veze*
$(0.01, 0.25]$	*linearna veza male jačine*
$(0.25, 0.64]$	*linearna veza srednje jačine*
$(0.64, 0.99]$	*linearna veza velike jačine*
$(0.99, 1.00]$	*potpuna linearna veza*

Primer 10.1. *Za niz podataka*

$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{y}$	0.651	0.762	0.856	1.063	1.190	1.298	1.421	1.440

odrediti linearnu regresiju $y = ax + b$ *i koeficijent determinacije* R^2.

Rešenje. Jednačina prave linearne regresije je određena u Primeru 9.1./(*iii*) sa

$$y = ax + b = 0.122273\ldots x + 0.534892\ldots\,.$$

Prema navedenoj formuli vrednost koeficijenta determinacije numerički iznosi:

$$R^2 = 0.979735\ldots$$

i samim tim reč je o linearnoj vezi (izuzetno) velike jačine.

Literatura

BRANKO MALEŠEVIĆ, IVANA JOVOVIĆ: *Predavanja i vežbe iz predmeta Složenost algoritama i odabrane metode optimizacije* (13e082sao), *Elementi disretne matematike u telekomunikacijama* (13e 082edtm) Elektrotehnički fakultet, Beograd 2020. (sajt http://optimizacija.etf.rs/)