SLOŽENOST ALGORITAMA
I
ODABRANE METODE OPTIMIZACIJE

ZA STUDENTE ELEKTROTEHNIKE

Branko Malešević i Ivana Jovović

Glava 1

1. Linearno programiranje

1.1 Sistemi linearnih nejednačina

U ovoj glavi radićemo uglavnom dvodimenzionalni i trodimenzionalni slučaj. Sve definicije i teoreme dobijene u dvodimenzionalnom i trodimenzionalnom slučaj mogu se na prirodan način uopštiti na n-dimenzionalni slučaj.

Sistem linearnih nejednačina sa nepoznatim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je definisan sa:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m, \end{array} \tag{1.1}$$

gde su $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. *Rešenje sistema* (1.1) je uređena n-torka $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ takva da je svaka nejednačina sistema (1.1) zadovoljena za $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$. Sva rešenja sistema (1.1) obrazuju skup koji se naziva *skup rešenja sistema*. Sistem linearnih nejednačina koji ima bar jedno rešenje naziva se *saglasnim sistemom*. Sistem linearnih nejednačina koji nema rešenje naziva se *protivrečnim sistemom*. Dva sistema linearnih nejednačina su *ekvivalentna* ako i samo ako je svako rešenje prvog sistema rešenje i drugog i obrnuto. Svaka dva protivrečna sistema su ekvivalentna. Svaki sistem linearnih nejednačina se može napisati u obliku (1.1). Ukoliko u sistemu ima linearnih nejednačina oblika

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i,$$

one se množenjem sa -1 mogu dovesti na željeni oblik.

Skup svih tačaka ravni koje zadovoljavaju nejednačinu $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$, $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ naziva se *poluravan*. Skup svih tačaka ravni koje zadovoljavaju nejednačinu

$$a_1x_1 + a_2x_2 < b,$$

$a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ naziva se *otvorena poluravan*. Skup svih tačaka n-dimenzionalnog prostora koje zadovoljavaju nejednačinu $a_1x_1 + a_2x_2 \ldots + a_nx_n \leq b$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ naziva se *n-dimezionalni* *poluprostor*. Skup svih tačaka n-dimenzionalnog prostora koje zadovoljavaju nejednačinu

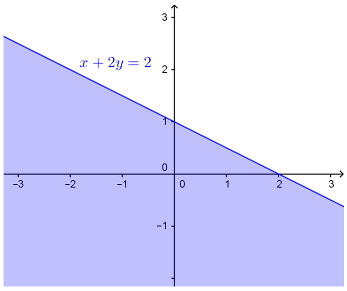
$$a_1x_1 + a_2x_2 \ldots + a_nx_n < b,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ naziva se *otvoreni n-dimezionalni poluprostor*.

Primer 1.1 Ako se x_1 i x_2 posmatraju kao koordinate jedne ravni sa Dekartovim koordinatnim sistemom, grafički prikazati rešenje nejednačine

$$x_1 + 2x_2 \leq 2.$$

Rešenje. Prava $x_1 + 2x_2 = 2$ deli ravan Ox_1x_2 na dve poluravni. Uređeni par $(0,0)$ zadovoljava nejednačinu $x_1 + 2x_2 \leq 2$. Prema tome, rešenje nejednačine $x_1 + 2x_2 \leq 2$ je poluravan ograničena pravom $x_1 + 2x_2 = 2$ koja sadrži tačku $O(0,0)$.

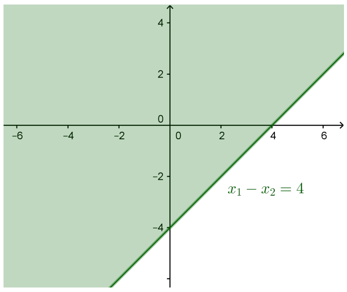


□

Primer 1.2 Ako se x_1 i x_2 posmatraju kao koordinate jedne ravni sa Dekartovim koordinatnim sistemom, grafički prikazati rešenje nejednačine

$$x_1 - x_2 \leq 4.$$

Rešenje. Prava $x_1 - x_2 = 4$ deli ravan Ox_1x_2 na dve poluravni. Uređeni par $(0,0)$ zadovoljava nejednačinu $x_1 - x_2 \leq 4$. Prema tome, rešenje nejednačine $x_1 - x_2 \leq 4$ je poluravan ograničena pravom $x_1 - x_2 = 4$ koja sadrži tačku $O(0,0)$.



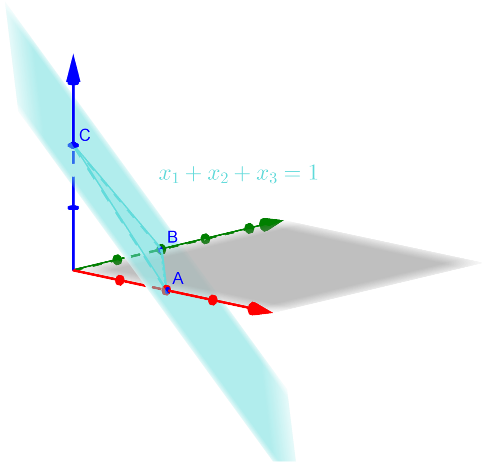
□

U prvom primeru bi mogli reći da je rešenje nejednačine $x_1 + 2x_2 \leq 2$ skup svih tačaka koje se nalaze ispod prave $x_1 + 2x_2 = 2$, dok u drugom primeru rešenje nejednačine $x_1 - x_2 \leq 4$ predstavlja skup svih tačaka koje se nalaze iznad prave $x_1 - x_2 = 4$. Pojmove ispod i iznad prave $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ definišemo na sledeći način. Kažemo da se tačka (α_1, α_2) nalazi *ispod* (*iznad*) prave $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, $a_2 \neq 0$, ako i samo ako na pravoj postoji tačka $(\alpha_1, \frac{b-a_1\alpha_1}{a_2})$ takva da je $\alpha_2 < \frac{b-a_1\alpha_1}{a_2}$, ($\alpha_2 > \frac{b-a_1\alpha_1}{a_2}$). Slično se definišu i pojmovi levo i desno od prave. Kažemo da se tačka (α_1, α_2) nalazi *levo* (*desno*) od prave $ax_1 + a_2x_2 = b$, $a_1 \neq 0$, ako i samo ako na pravoj postoji tačka $(\frac{b-a_2\alpha_2}{a_1}, \alpha_2)$ takva da je $\alpha_1 < \frac{b-a_2\alpha_2}{a_1}$, ($\alpha_1 > \frac{b-a_2\alpha_2}{a_1}$).

■ **Primer 1.3** Ako se x_1, x_2 i x_3 posmatraju kao koordinate jednog prostora sa Dekartovim koordinatnim sistemom, grafički prikazati rešenje nejednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

Rešenje. Ravan $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ određena je tačkama $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ i $C(0,0,1)$. Ravan $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ deli prostor $Ox_1x_2x_3$ na dva poluprostora. Uređena trojka $(0,0,0)$ zadovoljava nejednačinu $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$. Prema tome, rešenje nejednačine $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ je poluprostor ograničen ravni $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ koja sadrži tačku $O(0,0,0)$.

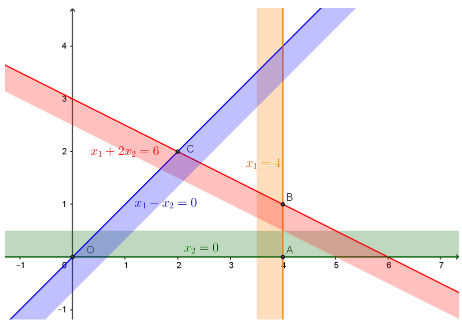


□

■ **Zadatak 1.1** Odrediti skup rešenja sistema linearnih nejednačina sa dve promenljive x_1 i x_2:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje. Tačka $O(0,0)$ je presek pravih $x_2 = 0$ i $x_1 - x_2 = 0$. Tačka $A(4,0)$ je presek pravih $x_2 = 0$ i $x_1 = 4$. Tačka $B(4,1)$ je presek pravih $x_1 = 4$ i $x_1 + 2x_2 = 6$. Dok je tačka $C(2,2)$ presek pravih $x_1 + 2x_2 = 6$ i $x_1 - x_2 = 0$. Rešenje datog sistema je četvorougao $OABC$ sa svojom unutrašnjošću.

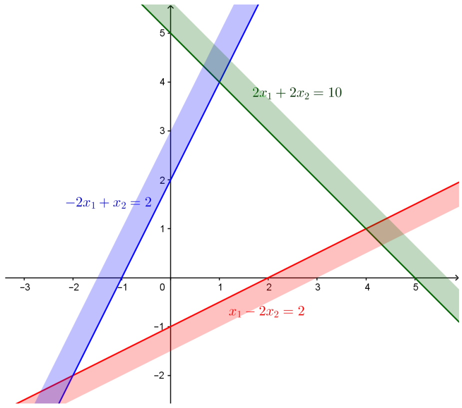


□

■ **Zadatak 1.2** Odrediti skup rešenja sistema linearnih nejednačina sa dve promenljive x_1 i x_2:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq 2 \\ -2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 10. \end{aligned}$$

Rešenje. Dati sistem je protivrečan.



□

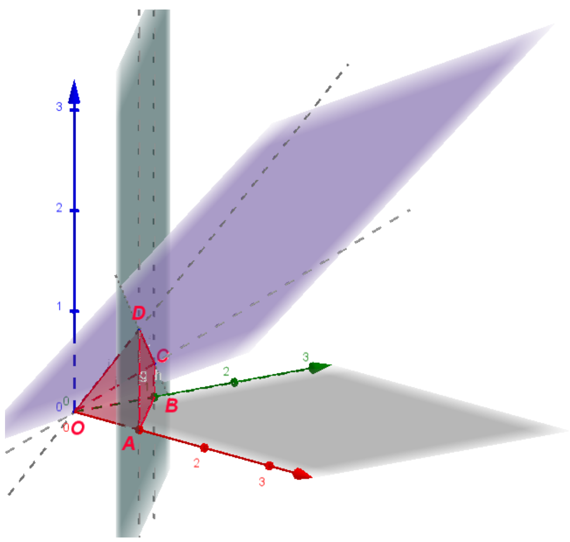
■ **Zadatak 1.3** Odrediti skup rešenja sistema linearnih nejednačina sa tri promenljive x_1, x_2 i x_3:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje. Prava AB je presek ravni $x_3 = 0$ i $x_1 + x_2 = 1$. Prava AD je presek ravni $x_2 = 0$ i $x_1 + x_2 = 1$. Prava BC je presek ravni $x_1 = 0$ i $x_1 + x_2 = 1$. Prava DC je presek ravni $x_1 + x_2 = 1$ i $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Prava OA je presek ravni $x_2 = 0$ i $x_3 = 0$ (x_1-osa). Prava OB je presek ravni $x_1 = 0$ i $x_3 = 0$ (x_2-osa). Prava OC je presek ravni $x_1 = 0$ i $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Prava OD je presek ravni $x_2 = 0$ i $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

Tačka O je presek ravni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ i $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Tačka A je presek ravni $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ i $x_1 + x_2 = 1$. Tačka B je presek ravni $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ i $x_1 + x_2 = 1$. Tačka C je presek ravni $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 1$ i $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Tačka D je presek ravni $x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 1$ i $3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

Rešenje datog sistema je četvorostrana piramida sa osnovom $ABCD$ i vrhom O sa svojom unutrašnjošću.



□

1.2 Konveksni skupovi

Definicija 1.2.1 Skup tačaka S naziva se *konveksnim skupom* ako i samo ako za svake dve tačke skupa S sve tačke duži određene tim tačkama takođe pripadaju skupu S. Skup koji sadrži manje od dve tačke je konveksan.

Teorema 1.2.1 Presek konveksnih skupova je konveksan skup.

Dokaz. Neka su S_1 i S_2 konveksni skupovi. Ako je $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ili $S_1 \cap S_2 = \{T\}$ onda je $S_1 \cap S_2$ konveksan skup. Pretpostavimo da $S_1 \cap S_2$ sadrži bar dve tačke. Neka su P i Q dve proizvoljne tačke skupa $S_1 \cap S_2$. Tačke P i Q pripadaju skupovima S_1 i S_2. Skupovi S_1 i S_2 su konveksni skupovi. Sve tačke duži određene tačkama P i Q pripadaju skupu S_1, odnosno S_2. Prema tome, sve tačke duži određene tačkama P i Q pripadaju skupu $S_1 \cap S_2$. Kako su P i Q dve proizvoljne tačke skupa $S_1 \cap S_2$, zaključujemo da je skup $S_1 \cap S_2$ konveksan. ■

Teorema 1.2.2 Svaka poluravan je konveksan skup.

Dokaz. Neka je data poluravan određena nejednačinom

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b.$$

Neka su $P(\alpha_1, \alpha_2)$ i $Q = (\beta_1, \beta_2)$ dve proizvoljne tačke date poluravni. Neka je $R(\gamma_1, \gamma_2)$ proizvoljna tačka duži PQ. Tada je $\overrightarrow{QR} = t\,\overrightarrow{QP}$, gde je $0 \leq t \leq 1$. Dalje imamo $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$ i $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$. Odnosno važi da je $\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = t\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})$. Što možemo zapisati i kao $\overrightarrow{OR} = t\,\overrightarrow{OP} + (1-t)\,\overrightarrow{OQ}$ ili koordinatno kao $(\gamma_1, \gamma_2) = t(\alpha_1, \alpha_2) + (1-t)(\beta_1, \beta_2)$. Odakle dobijamo da je $\gamma_1 = t\alpha_1 + (1-t)\beta_1$ i $\gamma_2 = t\alpha_2 + (1-t)\beta_2$. Za linearnu kombinaciju $a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2$ važi:

$$\begin{aligned} a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 &= a_1\,(t\alpha_1 + (1-t)\beta_1) + a_2\,(t\alpha_2 + (1-t)\beta_2) \\ &= t\,(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) + (1-t)\,(a_1\beta_1 + a_2\beta_2)\,. \end{aligned}$$

Tačke P i Q pripadaju datoj poluravni pa važi da je $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \leq b$ i $a_1\beta_1 + a_2\beta_2 \leq b$ odakle zaključujemo da važi

$$\begin{aligned} a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 &= t\,(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) + (1-t)\,(a_1\beta_1 + a_2\beta_2) \\ &\leq tb + (1-t)b = b. \end{aligned}$$

Prema tome, tačka $R(\gamma_1, \gamma_2)$ pripada poluravni određenoj nejednačinom $ax_1 + a_2x_2 \leq b$. Odakle zaključujemo da je data poluravan konveksan skup. ■

Napomena 1.1 Svaki n-dimenzionalan poluprostor je konveksan skup.

Teorema 1.2.3 Presek poluravni je konveksan skup.

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.2.1 imamo da je presek konveksni skupova konveksan skup. Na osnovu Teoreme 1.2.2 imamo da je svaka poluravan konveksan skup. Prema tome, presek poluravni je konveksan skup. ■

Napomena 1.2 Presek n-dimenzionalnih poluprostora je konveksan skup.

Definicija 1.2.2 Skup S tačaka čije koordinate zadovoljavaju sistem linearnih nejednačina sa dve promenljive x_1 i x_2:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & \leq & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 & \leq & b_m \end{array}$$

naziva se *poligonalni konveksan skup*.

Definicija 1.2.3 Skup S tačaka čije koordinate zadovoljavaju sistem linearnih nejednačina sa n promenljivih $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

naziva se *poliedarski konveksan skup*.

Definicija 1.2.4 Tačka koja pripada poliedarski konveksnom skupu S i preseku granica n poluprostora datog sisitema naziva se *ekstremna tačka* skupa S.

■ **Zadatak 1.4** Odrediti ekstremne tačke poligonalnog konveksnog skupa definisanog sistemom:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ x_1 & \leq & 4 \\ x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Rešenje. U Zadatku 1.1 videli smo da je rešenje datog sistema četvorougao $ABCD$ sa svojom unutrašnjošću, koji je kao presek četiri poluravni poligonalni konveksni skup.

Ekstremne tačke četvorougla $ABCD$ su preseci granica dve poluravni, odnosno preseci po dve prave iz skupa:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 6 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & 0, \end{array}$$

koje pripadaju četvorouglu $ABCD$ ili njegovoj unutrašnjosti. Dve prave od navedene četiri možemo izabrati na $\binom{4}{2}$ načina. Presek pravih $x_1 + 2x_2 = 6$ i $x_1 - x_2 = 0$ je tačka C. Presek pravih $x_1 + 2x_2 = 6$ i $x_1 = 4$ je tačka B. Presek pravih $x_1 + 2x_2 = 6$ i $x_2 = 0$ je tačka $(6,0)$, koja ne zadovoljava treću nejednačinu sistema. Presek pravih $x_1 - x_2 = 0$ i $x_1 = 4$ je tačka $(4,4)$, koja ne zadovoljava četvrtu nejednačinu sistema. Presek pravih $x_1 - x_2 = 0$ i $x_2 = 0$ je tačka O. Presek pravih $x_1 = 4$ i $x_2 = 0$ je tačka A. Ekstremne tačke poligonalnog konveksnog skupa koji je rešenje datog sistema su temena četvorougla $ABCD$. □

■ **Zadatak 1.5** Odrediti ekstremne tačke poliedarskog konveksnog skupa definisanog sistemom:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 - 3x_3 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Rešenje. U Zadatku 1.3 videli smo da je rešenje datog sistema četvorostrana piramida $OABCD$ sa svojom unutrašnjošću, koji je kao presek pet poluprostora poliedarski konveksni skup.

Ekstremne tačke piramide $OABCD$ su preseci granica tri poluprostora, odnosno preseci po tri ravni iz skupa:

$$\begin{aligned} 3x_1+x_2-3x_3 &= 0 \\ x_1+x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

koje pripadaju piramidi $OABCD$ ili njenoj unutrašnjosti. Tri ravni od navedenih pet možemo izabrati na $\binom{5}{3}=10$ načina. Presek ravni $3x_1+x_2-3x_3=0$, $x_1+x_2=1$ i $x_1=0$ je tačka C. Presek ravni $3x_1+x_2-3x_3=0$, $x_1+x_2=1$ i $x_2=0$ je tačka D. Presek ravni $3x_1+x_2-3x_3=0$, $x_1+x_2=1$ i $x_3=0$ je tačka $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)$, koja ne zadovoljava treću nejednačinu. Presek ravni $3x_1+x_2-3x_3=0$, $x_1=0$, $x_2=0$ i $x_3=0$ je tačka O. Broj načina na koji tačku O možemo dobiti kao presek tri od navedene četiri ravni je $\binom{4}{3}=4$. Presek ravni $x_1+x_2=1$, $x_1=0$ i $x_2=0$ je prazan skup. Presek ravni $x_1+x_2=1$, $x_1=0$ i $x_3=0$ je tačka B. Presek ravni $x_1+x_2=1$, $x_2=0$ i $x_3=0$ je tačka A. Ekstremne tačke poliedarskog konveksnog skupa koji je rešenje datog sistema su temena piramide $OABCD$. □

Zadatak 1.6 Odrediti ekstremne tačke poliedarskog konveksnog skupa definisanog sistemom:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3 &\leq 3 \\ x_1-x_2-x_3 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje. Ekstremne tačke poliedarskog konveksnog skupa definisanog navedenim sistemom su preseci granica tri poluprostora, odnosno preseci po tri ravni iz skupa:

$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3 &= 3 \\ x_1-x_2-x_3 &= 1 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

koje pripadaju datom skupu. Tri ravni od navedene četiri možemo izabrati na $\binom{4}{3}=4$ načina. Presek ravni $x_1-x_2+x_3=3$, $x_1-x_2-x_3=1$ i $x_1=0$ je tačka $(0,-2,1)$, koja ne zadovoljava četvrtu nejednačinu. Presek ravni $x_1-x_2+x_3=3$, $x_1-x_2-x_3=1$ i $x_2=0$ je tačka $A(2,0,1)$. Presek ravni $x_1-x_2+x_3=3$, $x_1=0$ i $x_2=0$ je tačka $B(0,0,3)$. Presek ravni $x_1-x_2-x_3=1$, $x_1=0$ i $x_2=0$ je tačka $C(0,0,-1)$. Ekstremne tačke poliedarskog konveksnog skupa koji je rešenje datog sistema su tačke A, B i C. □

Definicija 1.2.5 Poliedarski konveksan skup S u n-dimenzionom prostoru je *ograničen* ako i samo ako postoje pozitivni realni brojevi $k_1,k_2,\ldots,k_n$ takvi da za svaku tačku $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in S$ važi:

$$|x_1|\leq k_1, |x_2|\leq k_2,\ldots,|x_n|\leq k_n.$$

Zadatak 1.7 Ispitati da li je poligonalni konveksni skup definisan sistemom:

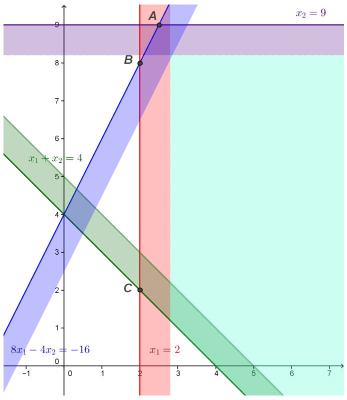
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\geq 4 \\ 8x_1-4x_2 &\geq -16 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_2 &\leq 9, \end{aligned}$$

ograničen.

Rešenje. Ekstremne tačke poligonalnog konveksnog skupa S koji je rešenje navedenog sistema su tačke $A(\frac{5}{2},9)$ (presek pravih $8x_1-4x_2=-16$ i $x_2=9$), $B(2,8)$ (presek pravih $8x_1-4x_2=-16$ i $x_1=2$) i $C(2,2)$ (presek pravih $x_1+x_2=4$ i $x_2=2$). Dokažimo da poligonalni konveksni skup S definisan navedenim sistemom nije ograničen. Odnosno, pokažimo da za svaki izbor pozitivnih realnih brojeva k_1 i k_2 postoji tačka $P(\alpha_1,\alpha_2)\in S$ takva da važi $|\alpha_1|>k_1$ ili $|\alpha_2|>k_2$. Proverimo da li tačka $P(5+k_1,8)$ pripada skupu S, za svako $k_1>0$. Zaista, imamo

$$\begin{array}{rcrcr} 5+k_1+8 & > & 13 & \geq & 4 \\ 40+8k_1-32 & > & 8 & \geq & -16 \\ 5+k_1 & > & 5 & \geq & 2 \\ 8 & \leq & 9. & & \end{array}$$

Važi i da je $5+k_1>k_1$. Pa prema tome, skup S nije ograničen.



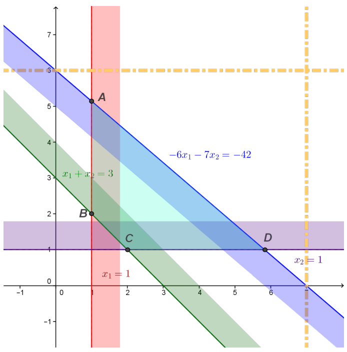
□

■ **Zadatak 1.8** Ispitati da li je poligonalni konveksni skup definisan sistemom:

$$\begin{array}{rcr} x_1+x_2 & \geq & 3 \\ -6x_1-7x_2 & \geq & -42 \\ x_1 & \geq & 1 \\ x_2 & \geq & 1, \end{array}$$

ograničen.

Rešenje. Ekstremne tačke poligonalnog konveksnog skupa S koji je rešenje navedenog sistema su tačke $A\left(1,\frac{36}{7}\right)$ (presek pravih $-6x_1-7x_2=-42$ i $x_1=1$), $B(1,2)$ (presek pravih $x_1+x_2=3$ i $x_1=1$), $C(2,1)$ (presek pravih $x_1+x_2=3$ i $x_2=1$) i $D\left(\frac{35}{6},1\right)$ (presek pravih $-6x_1-7x_2=-42$ i $x_2=1$). Poligonalni konveksni skup S definisan navedenim sistemom je ograničen. Ukoliko izaberemo $k_1=7$ i $k_2=6$ za svaku tačku $P(\alpha_1,\alpha_2)\in S$ važi da je $|\alpha_1|\leq k_1$ i $|\alpha_2|\leq k_2$.



□

1.3 Linearna funkcija na konveksnom skupu

Definicija 1.3.1 Funkcija $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana sa $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$, gde su $c_1,c_2,\ldots c_n \in \mathbb{R}$ proizvoljne konstante, naziva se *linearna funkcija*.

Označimo sa X i Y redom uređene n-torke $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ i $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$. Neka su $a,b\in\mathbb{R}$ proizvoljne konstante.

$$\begin{aligned}
f(aX+bY) &= f(a(x_1,x_2,\ldots,x_n)+b(y_1,y_2,\ldots,y_n))\\
&= f(ax_1+by_1,ax_2+by_2,\ldots,ax_n+by_n))\\
&= c_1(ax_1+by_1)+c_2(ax_2+by_2)+\ldots+c_n(ax_n+by_n)\\
&= a(c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n)+b(c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n)\\
&= af(x_1,x_2,\ldots,x_n)+bf(y_1,y_2,\ldots,y_n)=af(X)+bf(Y)
\end{aligned}$$

Razmatramo sledeći problem. Naći maksimalnu ili minimalnu vrednost linearne funkcije

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n,$$

gde nepoznate zadovoljavaju sistem nejednačina:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &\le b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &\le b_2\\
\ldots&\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n &\le b_m.
\end{aligned}$$

Ili drugim rečima, traži se maksimalna ili minimalna vrednost linearne funkcije na poliedarskom konveksnom skupu. Pokazaćemo da ukoliko linearna funkcija f ima maksimum ili minimum na poliedarskom konveksnom skupu S, onda funkcija f dostiže taj maksimum ili minimum u ekstremnim tačkama skupa S.

Teorema 1.3.1 Neka su $P(\alpha_1,\alpha_2)$ i $Q(\beta_1,\beta_2)$ dve tačke ravni, $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ linearna funkcija takva da je $f(\alpha_1,\alpha_2)\le f(\beta_1,\beta_2)$. Ako je $R(\gamma_1,\gamma_2)$ proizvoljna tačka duži PQ, onda za vrednost linearne funkcije f u tački R važi $f(\alpha_1,\alpha_2)\le f(\gamma_1,\gamma_2)\le f(\beta_1,\beta_2)$.

Dokaz. Za tačku $R(\gamma_1,\gamma_2)$ duži PQ važi $\overrightarrow{OR}=t\,\overrightarrow{OP}+(1-t)\overrightarrow{OQ}$, odnosno

$$(\gamma_1,\gamma_2)=t(\alpha_1,\alpha_2)+(1-t)(\beta_1,\beta_2).$$

Dalje imamo,

$$\begin{aligned}
f(\gamma_1,\gamma_2) &= f(t(\alpha_1,\alpha_2)+(1-t)(\beta_1,\beta_2))\\
&= f(t\alpha_1+(1-t)\beta_1,t\alpha_2+(1-t)\beta_2)\\
&= c_1(t\alpha_1+(1-t)\beta_1)+c_2(t\alpha_2+(1-t)\beta_2)\\
&= t(c_1\alpha_1+c_2\alpha_2)+(1-t)(c_1\beta_1+c_2\beta_2)\\
&= tf(\alpha_1,\alpha_2)+(1-t)f(\beta_1,\beta_2).
\end{aligned}$$

Kako je $f(\alpha_1,\alpha_2)\le f(\beta_1,\beta_2)$ imamo

$$\begin{aligned}
f(\gamma_1,\gamma_2) &= tf(\alpha_1,\alpha_2)+(1-t)f(\beta_1,\beta_2)\\
&\le tf(\beta_1,\beta_2)+(1-t)f(\beta_1,\beta_2)=f(\beta_1,\beta_2)
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f(\gamma_1,\gamma_2) &= tf(\alpha_1,\alpha_2)+(1-t)f(\beta_1,\beta_2) \\ &\geq tf(\alpha_1,\alpha_2)+(1-t)f(\alpha_1,\alpha_2)=f(\alpha_1,\alpha_2) \end{aligned}$$

■

Napomena 1.3 Ukoliko su vrednosti funkcije u tačkama P i Q jednake, tj. $f(\alpha_1,\alpha_2)=f(\beta_1,\beta_2)$, onda iz prethodne teoreme sledi da je vrednost funkcije f na duži PQ konstantna, tj. $f(\alpha_1,\alpha_2)=f(\gamma_1,\gamma_2)=f(\beta_1,\beta_2)$ za svaku tačku R duži PQ.

Teorema 1.3.2 Neka je $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ linearna funkcija definisana na ograničenom poligonalnom konveksnom skupu S. Tada funkcija f dostiže svoju maksimalnu ili minimalnu vrednost u nekim od ekstremnih tačaka skupa S.

Dokaz. Posmatrajmo sve ekstremne tačke (kojih ima konačno mnogo) skupa S i neka je M ekstremna tačka takva da je vrednost funkcije f u tački M veća ili jednaka od vrednosti f u ostalim ekstremnim tačkama. Neka je P proizvoljna unutrašnja tačka skupa S. Dokazaćemo da je $f(P)\leq f(M)$. Skup S je ograničen, pa prava MP seče granicu skupa S u tački N, tako da je tačka P između tačaka M i N. Neka su R i T ekstremne tačke koje određuju duž na kojoj leži tačka N. Pretpostavimo da je $f(M)<f(P)$. Na osnovu prethodne teoreme važi $f(M)<f(P)\leq f(N)$, i $f(N)\leq f(R)$ ili $f(N)\leq f(T)$. Odavde sledi da je $f(M)<f(P)\leq f(N)\leq f(R)$ ili $f(M)<f(P)\leq f(N)\leq f(T)$, a svaka od ovih nejednakost je protivrečna pretpostavci da je $f(M)$ najveća vrednost funkcije f u ekstremnim tačkama. Prema tome, $f(P)\leq f(M)$.
Pokazali smo ujedno i da tvrđenje važi za proizvoljnu tačku N koja pripada granici skupa S. ■

Teorema 1.3.3 Neka je $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ linearna funkcija definisana na neograničenom poligonalnom konveksnom skupu S. Ako funkcija f dostiže maksimum ili minimum na skupu S, onda je taj maksimum ili minimum dostignut u nekoj od ekstremnih tačaka skupa S.

■ **Zadatak 1.9** Naći, ako postoje, maksimalnu i minimalnu vrednost linearne funkcije $f(x_1,x_2)=2x_1-x_2$ na poligonalnom konveksnom skupu S definisanom sistemom:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &\leq 6 \\ x_1-x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje. U Zadatku 1.1 smo videli da je rešenje datog sistema poligonalni konveksni skup S koji predstavlja tačke četvorougla $OABC$ i tačke njegove unutrašnjosti. Dati skup je i ograničen. Zaista, za konstante $k_1=4$ i $k_2=2$ imamo da za svaku tačku $(\alpha_1,\alpha_2)\in S$ važi $|\alpha_1|\leq k_1$ i $|\alpha_2|\leq k_2$. Podsetimo se, koordinate tačaka O, A, B i C date su sa $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,1)$ i $C(2,2)$. U Zadatku 1.4 smo pokazali da su O, A, B i C ekstremne tačke skupa rešenja S. Na osnovu Teoreme 1.3.2 imamo da funkcija f dostiže svoju maksimalnu i minimalnu vrednost u nekim od ekstremnih tačaka skupa S. Vrednosti funkcije f u tačkama O, A, B i C date su sa:

- $f(O)=f(0,0)=2\cdot 0-0=0$
- $f(A)=f(4,0)=2\cdot 4-0=8$
- $f(B)=f(4,1)=2\cdot 4-1=7$
- $f(C)=f(2,2)=2\cdot 2-2=2.$

Maksimum funkcije f na skupu S je 8 i dostiže se u tački A, minimum funkcije f na skupu S je 0 i dostiže se u tački O. □

■ Zadatak 1.10 Naći, ako postoje, maksimalnu i minimalnu vrednost linearne funkcije $g(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2$ na poligonalnom konveksnom skupu S definisanom sistemom:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenje. U pitanju je sistem iz prethodnog zadatka. Prema tome, jedino što treba ispitati to je vrednost funkcije g u ekstremnim tačkama:

- $g(O) = g(0,0) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
- $g(A) = g(4,0) = 4 + 2 \cdot 0 = 4$
- $g(B) = g(4,1) = 4 + 2 \cdot 1 = 6$
- $g(C) = g(2,2) = 2 + 2 \cdot 2 = 6.$

Maksimum funkcije g na skupu S je 6 i dostiže se u dve ekstremne tačke B i C. Na osnovu Napomene 1.3 zaključujemo da je vrednost funkcije g u svakoj tački duži BC takođe 6. Minimum funkcije g na skupu S je 0 i dostiže se u tački O. □

■ Zadatak 1.11 Naći, ako postoje, maksimalnu i minimalnu vrednost linearne funkcije $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + x_2 - x_3$ na poliedarskom konveksnom skupu S definisanom sistemom:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje. U Zadatku 1.3 smo videli da je rešenje datog sistema poliedarski konveksni skup S koji predstavlja tačke četvorostrane piramide $OABCD$ i tačke njene unutrašnjosti. Dati skup je i ograničen. Zaista, za konstante $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ imamo da za svaku tačku $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in S$ važi $|\alpha_1| \leq k_1$, $|\alpha_2| \leq k_2$ i $|\alpha_3| \leq k_3$. Podsetimo se, koordinate tačaka O, A, B, C i D date su sa $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C\left(0,1,\frac{1}{3}\right)$ i $D(1,0,1)$. U Zadatku 1.5 smo pokazali da su O, A, B, C i D ekstremne tačke skupa rešenja S. Na osnovu Teoreme 1.3.2 imamo da funkcija f dostiže svoju maksimalnu i minimalnu vrednost u nekim od ekstremnih tačaka skupa S. Vrednosti funkcije f u tačkama O, A, B, C i D date su sa:

- $f(O) = f(0,0,0) = 2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$
- $f(A) = f(1,0,0) = 2 \cdot 1 + 0 - 0 = 2$
- $f(B) = f(0,1,0) = 2 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$
- $f(C) = f\left(0,1,\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 0 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $f(D) = f(1,0,1) = 2 \cdot 1 + 0 - 1 = 1$

Maksimum funkcije f na skupu S je 2 i dostiže se u tački A, minimum funkcije f na skupu S je 0 i dostiže se u tački O. □

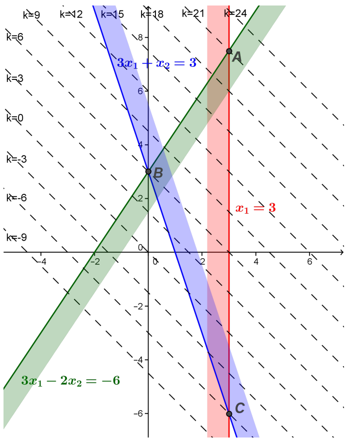
Geometrijska interpretacija problema nalaženja maksimalne ili minimalne vrednosti linearne funkcije $f(x_1,x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$ na poligonalnom konveksnom skupu S svodi se na nalaženja maksimalne ili minimalne vrednosti realnog parametra k za koje prava $c_1x_1 + c_2x_2 = k$ seče skup S.

Zadatak 1.12 Naći, ako postoje, maksimalne i minimalne vrednosti linearnih funkcija $f(x_1,x_2) = 2x_1 + 2x_2$ i $g(x_1,x_2) = 3x_1 - 2x_2$ na poligonalnom konveksnom skupu S definisanom sistemom:

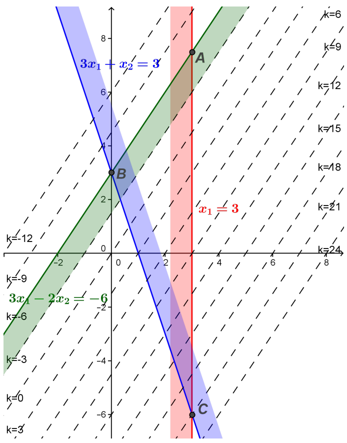
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geq -6 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\leq 3. \end{aligned}$$

Rešenje. Tačka $A\left(3, \frac{15}{2}\right)$ je presek pravih $3x_1 - 2x_2 = -6$ i $x_1 = 3$. Tačka $B(0,3)$ je presek pravih $3x_1 - 2x_2 = -6$ i $3x_1 + x_2 = 3$. Tačka $C(3,-6)$ je presek pravih $3x_1 + x_2 = 3$ i $x_1 = 3$. Rešenje datog sistema je poligonalni konveksni skup S koji predstavlja tačke trougla ABC i tačke njegove unutrašnjosti.

Rešenja linearne jednačine $f(x_1,x_2) = k$ se grafički mogu prikazati kao tačke prave $2x_1 + 2x_2 = k$. Za različite vrednosti realnog parametra k dobijamo različite prave pramena paralelnih pravih $2x_1 + 2x_2 = k$. Problem nalaženja maksimalne ili minimalne vrednosti funkcije f na poligonalnom konveksnom skupu S svodi se na nalaženja maksimalne ili minimalne vrednosti realnog parametra k za koje prava $2x_1 + 2x_2 = k$ seče skup S.



Sa slike se vidi, da za $k = 21$ prava $2x_1 + 2x_2 = 21$ sadrži tačku A i da je to maksimalna vrednost za koju neka prava iz pramena $2x_1 + 2x_2 = k$ seče skup S. U tački A funkcija f dostiže maksimalnu vrednost $f(A) = 21$. Sa druge strane, za $k = -6$ imamo da prava $2x_1 + 2x_2 = -6$ sadrži tačku C i da je to minimalna vrednost za koju neka prava iz pramena $2x_1 + 2x_2 = k$ seče skup S. U tački C funkcija f dostiže minimalnu vrednost $f(C) = -6$.

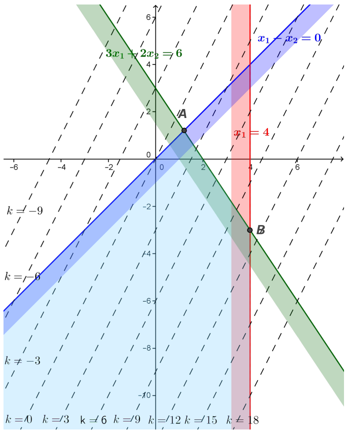


Rešenja linearne jednačine $g(x_1,x_2) = k$ se grafički mogu prikazati kao tačke prave $3x_1 - 2x_2 = k$. Svaka prava iz familije pravih $3x_1 - 2x_2 = k$ je paralelna sa pravom $3x_1 - 2x_2 = -6$ koja je granica sistema. Sa slike se vidi, da je $k = -6$ minimalna vrednost za koju neka prava iz pramena $3x_1 - 2x_2 = k$ seče skup S. Minimalna vrednost funkcije g dostiže se na duži AB. Za $k = 21$ imamo da prava $3x_1 - 2x_2 = 21$ sadrži tačku C i da je to maksimalna vrednost za koju neka prava iz pramena $3x_1 - 2x_2 = k$ seče skup S. U tački C funkcija g dostiže maksimalnu vrednost $f(C) = 21$. □

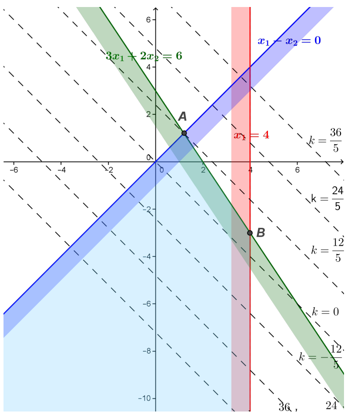
■ **Zadatak 1.13** Naći, ako postoje, maksimalne i minimalne vrednosti linearnih funkcija $f(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2$, $g(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ i $h(x_1,x_2) = x_1 - 2x_2$ na poligonalnom konveksnom skupu S definisanom sistemom:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 4. \end{aligned}$$

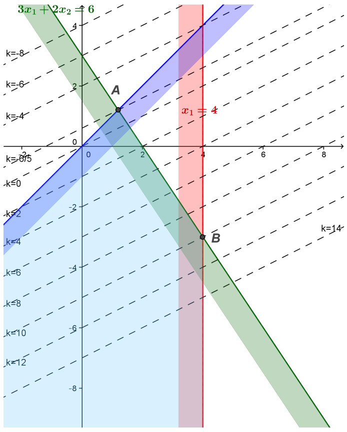
Rešenje. Tačka $A\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$ je presek pravih $3x_1 + 2x_2 = 6$ i $x_1 - x_2 = 0$. Tačka $B(4,-3)$ je presek pravih $3x_1 + 2x_2 = 6$ i $x_1 = 4$. Rešenje datog sistema je poligonalni konveksni skup S koji nije ograničen.



Rešenja linearne jednačine $f(x_1,x_2) = k$ se grafički mogu prikazati kao tačke prave $2x_1 - x_2 = k$. Svaka prava iz familije pravih $2x_1 - x_2 = k$ seče skup S. Funkcija f ne dostiže minimalnu ili maksimalnu vrednost na skupu S.



Rešenja linearne jednačine $g(x_1,x_2) = k$ se grafički mogu prikazati kao tačke prave $x_1 + x_2 = k$. Za $k < 0$ svaka prava iz familije pravih $x_1 + x_2 = k$ seče skup S. Funkcija g ne dostiže minimalnu vrednost na skupu S. Za $k = \frac{12}{5}$ imamo da prava $x_1 + x_2 = \frac{12}{5}$ sadrži tačku A i da je to maksimalna vrednost za koju neka prava iz pramena $x_1 + x_2 = k$ seče skup S. U tački A funkcija g dostiže maksimalnu vrednost $g(A) = \frac{12}{5}$.



Rešenja linearne jednačine $h(x_1,x_2) = k$ se grafički mogu prikazati kao tačke prave $x_1 - 2x_2 = k$. Za $k > 0$ svaka prava iz familije pravih $x_1 - 2x_2 = k$ seče skup S. Funkcija h ne dostiže maksimalnu vrednost na skupu S. Za $k = -\frac{6}{5}$ imamo da prava $x_1 - 2x_2 = -\frac{6}{5}$ sadrži tačku A i da je to minimalna vrednost za koju neka prava iz pramena $x_1 - 2x_2 = k$ seče skup S. U tački A funkcija h dostiže minimalnu vrednost $h(A) = -\frac{6}{5}$. □

■ **Zadatak 1.14** Sedam patuljaka je sklopilo ugovor da iskopa $12kg$ zlata i $18kg$ srebra. Kopaju u dva rudnika. U prvom rudniku oni su u stanju da dnevno iskopaju $2kg$ zlata i $2kg$ srebra. U drugom rudniku patuljci u toku jednog dana mogu da iskopaju $1kg$ zlata i $3kg$ srebra. Pomozite patuljcima da postave problem linearnog programiranja kako bi mogli da ispoštuju ugovor u što kraćem vremenskom roku.

Rešenje. Na predlog kolege Luke Gavrića 2014/23 zadatak radimo uz odgovarajuću *pesmu*.

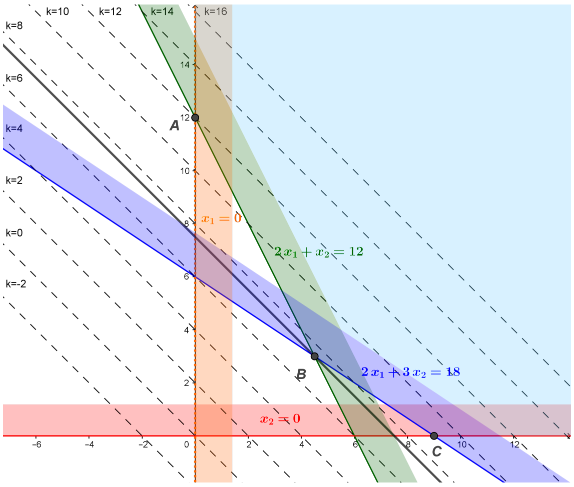
Cilj je da se tražena količina zlata i srebra iskopa za najmanje vreme. Kao promenljive x_1 i x_2 uzimamo vremena provedena u prvom i drugom rudniku, respektivno, izražena u danima. Kopajući u prvom rudniku, količina zlata i srebra koju će patuljci imati nakon x_1 dana je $x_1 \cdot 2kg_{Au} + x_1 \cdot 2kg_{Ag}$, dok im drugi rudnik nakon x_2 dana doprinosi sa $x_2 \cdot 1kg_{Au} + x_2 \cdot 3kg_{Ag}$. Cilj je da ukupno imaju najmanje $12kg$ zlata i $18kg$ srebra nakon $x_1 + x_2$ dana. Sistem jednačina kojim interpretiramo dati problem je:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 18 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Funkcija čiji minimum tražimo na datom skupu je $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$.

Definisanjem skupa i funkcije čiji minimum tražimo na datom skupu, postavljen je problem koji će patuljcima spasiti gl...lave.

Tačka $A(0,12)$ je presek pravih $2x_1+x_2=12$ i $x_1=0$. Za tačku $B\left(\frac{9}{2},3\right)$ imamo da je presek pravih $2x_1+x_2=12$ i $2x_1+3x_2=18$. Dok je tačka $C(9,0)$ presek pravih $2x_1+3x_2=18$ i $x_2=0$. Rešenje datog sistema je poligonalni konveksni skup S koji nije ograničen.



Rešenja linearne jednačine $f(x_1,x_2)=k$ se grafički mogu prikazati kao tačke prave $x_1+x_2=k$. Za $k>8$ svaka prava iz familije pravih $x_1+x_2=k$ seče skup S. Funkcija h ne dostiže maksimalnu vrednost na skupu S. Za $k=\frac{15}{2}$ imamo da prava $x_1+x_2=\frac{15}{2}$ sadrži tačku B i da je to minimalna vrednost za koju neka prava iz pramena $x_1+x_2=k$ seče skup S. U tački B funkcija f dostiže minimalnu vrednost $f(B)=\frac{15}{2}$. Prema tome, patuljcima je potrebno 8 dana da isporuče traženu količinu ova dva plemenita metala. A nakon toga ...

□

Zadatak 1.15 Etno kuća iz Zlakuse se bavi grnčarstvom i pravi šolje i tanjire. Da bi se napravila šolja, potrebno je 6 minuta, dok je za tanjir potrebno 3 minuta. Pri pravljenju šolje potroši se 75 gr, dok se za tanjir potroši 100 gr gline. Posao treba završiti za 20 sati. Na raspolaganju je 250 kg gline. Zarada koja se ostvaruje po svakoj šolji je 20 dinara, a po tanjiru je 15 dinara. Koliko šolja i tanjira je potrebno napraviti kako bi se ostvarila maksimalna zarada?

■ **Zadatak 1.16** Vlasnica male fabrike satova „ O'clock" iz Kikinde pokušava da nađe proizvodni plan koji bi joj omogućio najveću moguću dobit. Fabrika proizvodi dve vrste satova „ Miss hour" za žene i „ Mister Chrono" za muškarce. Dobit po satu iznosi:

- 1000 dinara za model „ Miss hour";
- 2500 dinara za model „ Mister Chrono".

Potražnja za satovima je ogromna i premašuje mogućnost proizvodnje. Kapacitet proizvodnje je ograničen sa tri vrste resursa. Fabrika dnevno ima na raspolaganju:

- 40 specijalnih tranzistora;
- 200 sati radnika koji sastavljaju satove;
- 160 sati radnika koji proveravaju ispravnost satova.

Tranzistori se ugrađuju isključivo u muške satove. Za sastavljanje jednog sata modela „ Miss hour" potrebno je vreme od samo jednog sata. Za sastavljanje jednog sata modela „ Mister Chrono" potrebno je vreme od čak četiri sata. Za proveru jednog sata modela „ Miss hour" potreban je jedan sat rada. Za proveru jednog sata modela „ Mister Chrono" potrebno je dva sata rada. Pomozite mladoj vlasnici da odgonetne kojim se proizvodnim programom može ostvariti najveća moguća dobiti i koliki će biti iznos te dobiti.

■ **Zadatak 1.17** Stolarska radionica „ Žika i sinovi" pravi stolove i stolice. Žika se bavi proizvodnjom, dok se njegovi sinovi bave farbanjem i zaštitom drveta. Ako bi proizvodio samo stolove Žika bi u toku dana mogao da ih napravi 5, dok ako bi proizvodio samo stolice, na dnevnom nivou bi ih napravio 15. Sinovi bi mogli da ofarbaju 25 stolova ako bi se samo time bavili, dok je broj stolica koje mogu da ofarbaju u toku dana 40, opet pod uslovom da samo to rade. Očekuje se da se na dnevnom nivou proizvede bar jedan komplet od jednog stola i četiri stolice. Zarada po stolu je 10000 dinara a po stolici 4000. Pomozite Žiki i njegovim sinovima da naprave optimalni dnevni plan proizvodnje.